

ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE
UNIVERSITÉ D'AVIGNON ET DES PAYS DE VAUCLUSE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mécanique

ECOLE DOCTORALE 380 «SCIENCES ET AGRONOMIE »
UMR A 1114 «Climat, Sol et Environnement» (CSE)

ETUDE NUMÉRIQUE DE LA PROPAGATION DES ONDES MÉCANIQUES DANS UN MILIEU POREUX EN RÉGIME IMPULSIONNEL

présentée et soutenue publiquement par

Arnaud MESGOUEZ

le 26 septembre 2005

à l'Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse

devant le Jury composé de :

<i>Président</i>	H. GOUIN	<i>Professeur, Université d'Aix-Marseille III</i>
<i>Rapporteurs</i>	D. LE HOUEDDEC	<i>Professeur, Ecole Centrale de Nantes</i>
	A. WIRGIN	<i>Directeur de Recherche C.N.R.S., Marseille</i>
<i>Examineurs</i>	H. BOLVIN	<i>Maître de Conférences-HDR, Université d'Avignon</i>
	A. CHAMBAREL	<i>Professeur, Université d'Avignon</i>
	L. DI PIETRO	<i>Directeur de Recherche I.N.R.A., Avignon</i>

Directeur de Thèse : André Chambarel

Co-directrice de Thèse : Gaëlle Lefeuvre-Mesgouez

UMR A 1114 «Climat, Sol et Environnement»

Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse

33 rue Louis Pasteur, 84000 Avignon

Etude numérique de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux en régime impulsif

Résumé :

L'objectif de ce travail consiste à étudier numériquement la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux continu biphasique en régime impulsif. Un code de calcul permettant la simulation et l'analyse du comportement mécanique est mis au point à cet effet.

Une analyse préliminaire présente des généralités sur la notion de milieu poroviscoélastique, sur la théorie de Biot ainsi que sur la propagation des ondes mécaniques. Un bilan des résultats rencontrés dans la bibliographie montre la nécessité de mener une étude complémentaire sur le modèle complet du milieu poreux continu biphasique dans le domaine temporel.

Une approche par éléments finis est proposée dans le cadre de la théorie générale de Biot. Les caractéristiques de l'outil numérique développé sont précisées. En particulier, la structure orientée objet donne un code compact et souple. Un travail semi-analytique, préalablement effectué, s'intéresse aux phénomènes de dispersion, d'atténuation et à la détermination des vitesses de propagation des différentes ondes.

Une modélisation bidimensionnelle permet d'obtenir les déplacements temporels des phases solide et fluide en surface et en profondeur d'un sol poreux semi-infini. Une étude paramétrique des couplages mécaniques est effectuée. La seconde onde de compression est mise en évidence. Une première approche de sols hétérogènes ou partiellement saturés est en outre proposée.

L'étude de problèmes tridimensionnels est ensuite envisagée. La taille numérique importante de cette problématique nécessite alors la parallélisation du code de calcul. Des essais sur différents supercalculateurs sont réalisés pour mesurer la performance du calcul parallèle et conduisent à des résultats tridimensionnels.

Mots clés :

Propagation d'ondes - Milieu poreux - Régime impulsif - Théorie de Biot - Eléments finis - Calcul parallèle

Numerical study of mechanical wave propagation in a porous medium induced by an impulsive load

Abstract :

The aim of this research consists in studying numerically the mechanical wave propagation in a two-phase porous continuum in the time domain. A finite element code allowing the simulation and the analysis of the mechanical behaviour is developed for this purpose.

A preliminary study presents some general characters of the poroviscoelastic concept of medium, in the Biot theory as in mechanical wave propagation. An outcome, encountered in the literature, shows the necessity of complementary investigation using the whole two-phase porous continuum in the time domain.

A finite element approach within the framework of the complete Biot theory is proposed. The characteristics of the numerical tool developed are specified. Particularly, the C++ object oriented programming gives a low-sized solver organised in three interchangeable classes. Moreover, a previous semi-analytical work provides the dispersion and attenuation relationships, as well as the exact determination of the wave celerities.

Applications deal with porous soils : the time domain displacements of the solid and the fluid phases over and within the porous semi-infinite ground are obtained for two-dimensional problems. Parametric studies of the mechanical couplings are carried out. The compressional wave of the second kind is highlighted. A first approach of heterogeneous or partially saturated soils is also proposed.

The study of three-dimensional cases is then considered. The important numerical size of this kind of problems requires the parallelization of the code. Tests on various supercomputers are carried out in order to measure the performance of parallel computing and lead to three-dimensional results.

Key words :

Wave propagation - Porous medium - Impulsive load - Biot theory - Finite element - Parallel computing

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements à Monsieur André CHAMBARREL, Professeur à l'Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, qui m'a permis de réaliser ce travail de doctorat au sein de l'U.M.R. Climat, Sol et Environnement. Ses qualités scientifiques et relationnelles, sa très grande disponibilité et sa patience sont pour beaucoup dans le plaisir que j'ai eu à effectuer cette activité de recherche.

Mes remerciements vont ensuite naturellement à ma co-directrice de thèse, Madame Gaëlle LEFEUVE-MESGOUEZ, Maître de Conférences à l' U.A.P.V., sans qui ce travail n'aurait simplement pas été possible.

Je souhaite également remercier Monsieur Henri GOUIN, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille III : je lui suis reconnaissant d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance.

Monsieur Donatien LE HOUEDDEC, Professeur Emérite à l'Ecole Centrale de Nantes et Monsieur Armand WIRGIN, Directeur de Recherche C.N.R.S. au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille, m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail et d'établir un rapport sur le mémoire proposé : qu'ils en soient vivement remerciés.

La collaboration entre l' U.A.P.V et l' I.N.R.A. d'Avignon a conduit Madame Liliana DI PIETRO, Directrice de Recherche à l' I.N.R.A. d'Avignon, et Monsieur Hervé BOLVIN, Maître de Conférences H.D.R. à l' U.A.P.V. à faire partie de mon jury : je tiens ici sincèrement à les en remercier.

J'associe à ces remerciements Madame FREIJ-DALLOZ, Directrice de l'I.U.T. d'Avignon ainsi que Messieurs CHARRE et VOLLE, respectivement Vice-Président du Conseil Scientifique et Président de l'U.A.P.V. : les décharges partielles de service pour activité de recherche en lien avec mon statut de P.R.A.G. accordées ces trois dernières années ont fortement contribué à la réalisation d'un travail de qualité.

Dans mes remerciements, je ne saurais oublier l'ensemble du personnel de l'I.U.T. d'Avignon et du département de Physique de l'U.F.R. Sciences de l'U.A.P.V. Ceux à qui ces remerciements sont dédiés se reconnaîtront, sans aucun doute.

Je ne peux terminer sans évoquer de nouveau le rôle essentiel de Gaëlle, mon épouse. Je suis vraiment enchanté d'avoir été "son premier thésard". Enfin, ma dernière pensée va à mon fils, Timon : en pleine découverte du langage, il était temps pour moi de terminer la rédaction de ce mémoire pour qu'il puisse étoffer son vocabulaire et ainsi arrêter de répéter "papa t'availle encor' sur l'o'dinateur..."

Principales notations

a	coefficient de tortuosité
$A(p)$	temps additionnel
c_{P1}	vitesse de propagation de l'onde $P1$
c_{P2}	vitesse de propagation de l'onde $P2$
c_S	vitesse de propagation de l'onde S
c_R	vitesse de propagation de l'onde R
E	module d'Young
$E(p)$	efficacité pour p processeurs
f	fréquence
f_c	fréquence caractéristique
$\{F_e\}$	vecteur force élémentaire
$\{F_g\}$	vecteur global des sollicitations
$\overrightarrow{grad}, \overrightarrow{rot}$	opérateurs gradient et rotationnel
$\Im m$	partie imaginaire
k	perméabilité absolue
K	perméabilité hydraulique
K_0, K_c, K_s, K_f	modules d'incompressibilité
$[K_e]$	matrice raideur élémentaire
$[K_g]$	matrice raideur globale
k_{P1}	nombre d'onde $P1$
k_{P2}	nombre d'onde $P2$
k_S	nombre d'onde S
k_R	nombre d'onde R
M	premier coefficient de Biot
$[M_e]$	matrice masse élémentaire
$[M_g]$	matrice masse globale
onde $P1$	première onde de compression
onde $P2$	seconde onde de compression
onde S	onde de cisaillement
onde R	onde de Rayleigh
p	pression fluide dans les chapitres 1 à 4, nombre de processeurs dans le chapitre 5
$\frac{P}{p}$	durée de la partie parallélisée
r	rayon du domaine d'étude
$\Re e$	partie réelle
S	durée de la partie séquentielle
$S(p)$	speed-up pour p processeurs
S_R	degré de saturation
t	variable temporelle

$T(p)$	temps d'exécution pour p processeurs
$T_{C1}(p)$	durée des communications point à point
$T_{C2}(p)$	durée des communications collectives
u_x, u_y, u_z	composantes du vecteur déplacement solide
U_x, U_y, U_z	composantes du vecteur déplacement fluide
$u_{i,j}$	dérivée de la $i^{\text{ème}}$ composante de u par rapport à la variable j
v_x, v_y, v_z	composantes du vecteur vitesse solide
V_x, V_y, V_z	composantes du vecteur vitesse fluide
w_x, w_y, w_z	composantes du vecteur déplacement relatif
$\{W_e\}$	vecteur élémentaire des variables
$\{W_g\}$	vecteur global des variables
x, y, z	abscisse, ordonnée, cote dans le repère 3D
$\bar{g}$	transformée de Fourier d'une fonction g par rapport aux variables d'espace
$\dot{g}$	dérivée temporelle de g
$\frac{\partial g}{\partial x}$	dérivée partielle de g par rapport à x
α_j	paramètres de l'algorithme de résolution temporelle
β	second coefficient de Biot
γ, ζ	paramètres de la transformée de Fourier sur les variables d'espace
δ_{ij}	symbole de Kronecker
Δt	pas de temps
$\overrightarrow{\Delta}$	opérateur laplacien
ε_{ij}	composante du tenseur des déformations
η	coefficient d'amortissement
θ, Θ	dilatations
λ_0, μ	coefficients de Lamé
ν	coefficient de Poisson
ω	pulsation
Ω	espace d'étude
Ω_e	domaine élémentaire
$\varphi, \overrightarrow{\psi}$	potentiels de Helmholtz issus de la décomposition du déplacement solide
$\varphi^r, \overrightarrow{\psi}^r$	potentiels de Helmholtz issus de la décomposition du déplacement relatif
ϕ	porosité
$\{\Psi(W_g, t)\}$	résidu global
ρ_s	densité des grains solides
ρ_f	densité de la phase fluide
σ_{ij}	composante du tenseur des contraintes

Table des matières

Introduction Générale	1
1 Bibliographie	3
1.1 Introduction	3
1.2 Milieu poreux et échelle spatiale d'étude	3
1.3 Approches microscopique et macroscopique	6
1.3.1 Point de vue microscopique	6
1.3.2 Point de vue macroscopique : approche de Biot	7
1.4 Equations du modèle poroélastique de Biot	7
1.4.1 Lois de comportement	8
1.4.2 Equations du mouvement	10
1.4.3 Relations entre les coefficients du modèle de Biot	11
1.4.4 Cas particuliers et cas limites	11
1.5 Présentation des différentes ondes se propageant dans un milieu semi-infini poreux continu biphasique	12
1.5.1 Les ondes volumiques	12
1.5.2 L'onde superficielle de Rayleigh	13
1.6 Amortissement physique interne propre au sol : amortissement viscoélastique hystérétique de Rayleigh	14
1.7 Résultats sur les milieux poreux	15
1.7.1 Approches analytiques et semi-analytiques	15
1.7.2 Approches numériques	16
1.7.3 Approche expérimentale	21
1.8 Conclusion et présentation générale des problèmes étudiés	21
1.8.1 Bilan de l'étude bibliographique	21
1.8.2 Problèmes envisagés	22
2 Contribution d'une approche semi-analytique harmonique au domaine temporel	27
2.1 Objectifs et hypothèses	27
2.2 Equations d'ondes du problème	28
2.3 Conditions aux limites	30

2.4	Résolution du système	31
2.4.1	Régime harmonique et transformée de Fourier spatiale	31
2.4.2	Résolution du système relatif aux ondes de compression	32
2.4.3	Résolution du système relatif à l'onde de cisaillement	32
2.4.4	Déplacements dans le domaine des nombres d'onde	33
2.4.5	Conditions aux limites dans le domaine des nombres d'onde	34
2.4.6	Bilan sur les déplacements dans le domaine des nombres d'onde	36
2.4.7	Cas bidimensionnel	36
2.5	Résultats	37
2.5.1	Vitesses de propagation des ondes, phénomènes de dispersion et d'atténuation	37
2.5.2	Résultats et analyse dans le domaine des nombres d'onde	40
2.5.3	Résultats dans le domaine spatial	41
2.6	Conclusion	42
3	Approche numérique par éléments finis	43
3.1	Introduction	43
3.2	Formulation éléments finis $\{u - U\}$	43
3.2.1	Objectif de la méthode des éléments finis et transformation du système du deuxième ordre en temps en un système du premier ordre	43
3.2.2	Formulation intégrale des équations aux dérivées partielles	45
3.2.3	Formulation faible	46
3.2.4	Discrétisations géométrique et analytique	46
3.2.5	Discrétisation de la forme faible élémentaire	48
3.2.6	Bilan élémentaire	51
3.2.7	Bilan sur le système discret	53
3.2.8	Procédure d'assemblage et notion de système discret global	53
3.3	Algorithme temporel de résolution numérique	53
3.4	Code C++ FAFEMO	55
3.5	Conclusion	57
4	Résultats bidimensionnels	59
4.1	Introduction	59
4.2	Transient mechanical wave propagation in semi-infinite porous media using a finite element approach in <i>Soil Dynamics and Earthquake Engineering</i>	60
4.3	Numerical approach of Biot's equations for transient regimes : study of mechanical couplings in <i>Eurodyn 2005</i>	71
4.4	Modélisation d'un massif hétérogène	78
4.5	Milieu poreux partiellement saturé	87
4.5.1	Modèle de milieu partiellement saturé	87

4.5.2	Etude du sol dur	89
4.5.3	Etude du sol sablo-argileux	90
4.6	Conclusion	94
5	Calcul parallèle et résultats tridimensionnels	97
5.1	Introduction	97
5.2	Qu'est-ce que le calcul parallèle ?	98
5.2.1	Les différents types de parallélisation	98
5.2.2	Architectures de calculateurs parallèles	99
5.2.3	Cadre des éléments finis	100
5.2.4	L'environnement de communication MPI	102
5.3	Travail de parallélisation effectué sur le code FAFEMO	103
5.3.1	Où paralléliser le code FAFEMO ?	103
5.3.2	Décomposition algébrique de la parallélisation	105
5.3.3	Parallélisation en un modèle SPMD	106
5.4	Caractéristiques des supercalculateurs utilisés	107
5.4.1	Quelques résultats	107
5.4.2	Cluster Chœur et serveur SGI Origin 3800	107
5.5	Résultats numériques	108
5.5.1	Outils de mesure de la qualité de la parallélisation	108
5.5.2	Principaux résultats obtenus	109
5.5.3	Répartition du temps d'exécution du programme parallèle	113
5.6	Résultats tridimensionnels	118
5.7	Perspectives	121
	Conclusion Générale	123
	Références bibliographiques	125

Introduction générale

Les méthodes d'investigation ondulatoire non destructives permettant l'analyse des propriétés physiques d'un milieu poreux font appel à diverses spécialités de Sciences-Physiques allant de l'électromagnétisme à l'acoustique. La propagation d'une ou de plusieurs ondes constitue effectivement un support d'informations à partir duquel les caractéristiques de ce milieu peuvent être mises en évidence.

L'UMR Climat, Sol et Environnement de l'Université et de l'INRA d'Avignon et des Pays de Vaucluse a mené un certain nombre d'études de caractérisation de milieux poreux en s'appuyant sur la propagation des ondes électromagnétiques en régime transitoire. Pour compléter les possibilités de caractérisation, une nouvelle voie de recherche concernant l'étude de la propagation des ondes mécaniques a débuté en même temps que ce travail de doctorat. Bien que fréquemment employées en régime permanent dans le domaine sismique ou médical par exemple, l'utilisation des ondes mécaniques pour la caractérisation d'un environnement poreux en régime impulsionnel est nettement moins courante.

L'objectif de ce travail consiste donc à étudier numériquement la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux continu biphasique en régime impulsionnel. Un code de calcul permettant la simulation et l'analyse du comportement mécanique est mis au point à cet effet. Une approche par éléments finis en déplacements solide et fluide est envisagée. La sollicitation appliquée en surface du massif correspond à un choc modélisé par une impulsion temporelle de très courte durée.

Les deux points clefs de l'étude présentée dans ce mémoire sont :

- ✓ la prise en compte d'une modélisation du sol sous forme d'un milieu poreux continu biphasique. Dans les domaines de la géophysique allant de la sismologie à l'étude vibratoire des sols ou à l'interaction sols-structures, l'hypothèse la plus commune et la plus utilisée est de considérer le massif comme un milieu solide monophasique élastique ou viscoélastique. Cependant, la prise en compte de la phase fluide, des interactions entre le squelette solide et le fluide, de la structure et de la cohésion interne du milieu, conduit à modéliser le sol comme un massif continu biphasique solide-fluide après homogénéisation à l'échelle macroscopique. La théorie de Biot est alors le modèle de milieu le plus avancé aujourd'hui. La simulation sur un sol biphasique représente un apport supplémentaire d'informations et est donc complémentaire de l'étude du massif monophasique.

- ✓ le travail dans le domaine temporel. Lorsque la méthode numérique des éléments finis est utilisée en régime transitoire, nous sommes confrontés à des calculs de volume important. En effet, les algorithmes de résolution du système différentiel nécessitent un processus pas à pas : ceci représente un coût CPU et un coût en espace mémoire pouvant devenir très importants pour des problèmes de dimensions réelles. L'étude du régime transitoire est par conséquent moins répandue que l'étude du régime permanent traitant du problème équivalent.

Ainsi, ce mémoire se divise en cinq parties :

- ✓ la première partie est consacrée à l'analyse bibliographique. Nous commençons par définir les différentes échelles spatiales de modélisation d'un milieu poreux. Nous détaillons ensuite l'approche du milieu continu biphasique correspondant à la théorie générale de Biot en insistant sur la signification physique des différents paramètres et des couplages mécaniques. Un certain nombre de généralités sur la propagation d'ondes dans les sols viscoélastiques est également rappelé. Enfin, nous présentons une synthèse des méthodes analytiques et numériques ainsi qu'un bilan des travaux numériques importants effectués sur la thématique de ce mémoire.
- ✓ la seconde partie présente un travail semi-analytique en régime harmonique permettant de déterminer les vitesses de propagation des différentes ondes et d'appréhender les conséquences des phénomènes de dispersion et d'atténuation lors de l'étude des régimes transitoires.
- ✓ la troisième partie traite de l'approche par éléments finis et du code de calcul que nous avons développé pour étudier la propagation des ondes mécaniques en régime impulsionnel. Les caractéristiques de l'outil numérique développé sont précisées. En particulier, la structure orientée objet donne un code compact et souple.
- ✓ la quatrième partie regroupe différentes études bidimensionnelles dans le domaine temporel. Les déplacements des phases solide et fluide en surface et en profondeur d'un sol poreux semi-infini sont présentés. L'analyse est effectuée en termes de propagation d'ondes : outre l'étude des temps d'arrivée, des cartographies du massif sont proposées pour des sols homogènes différemment couplés, saturés ou partiellement saturés, ou encore hétérogènes.
- ✓ dans la dernière partie, nous présentons quelques résultats tridimensionnels obtenus grâce au calcul parallèle. L'objectif est alors d'exploiter les ressources informatiques d'un réseau d'ordinateurs. En effet, la taille numérique inhérente au cas tridimensionnel nécessite un travail de parallélisation du code : nous revenons notamment sur les caractéristiques du calcul parallèle réalisé sur différents super-ordinateurs ainsi que sur son efficacité.

La conclusion de ce mémoire souligne enfin un ensemble de perspectives à retenir pour des développements futurs.

Chapitre 1

Bibliographie

1.1 Introduction

Ce chapitre présente une synthèse bibliographique des travaux effectués sur l'étude de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux.

Tout d'abord, nous définissons la notion de milieu poreux en soulignant les différentes échelles spatiales rencontrées en modélisation. Dans un deuxième temps, nous introduisons le modèle macroscopique étudié : nous présentons alors l'approche continue biphasique correspondant à la théorie générale de Biot. Nous rappelons ensuite quelques généralités d'une part sur les différentes ondes mécaniques se propageant dans un massif semi-infini et d'autre part sur l'amortissement physique interne propre au sol.

La section 1.7 dresse un bilan des principaux résultats obtenus sur l'étude de la propagation des ondes mécaniques dans les milieux poreux. Une attention particulière est portée aux cas des régimes transitoires sans négliger l'étude complémentaire des régimes permanents.

Enfin, en introduction aux chapitres suivants, nous présentons les géométries et les caractéristiques mécaniques des massifs modélisés.

1.2 Milieu poreux et échelle spatiale d'étude

Lorsque nous abordons l'étude des milieux poreux, une des premières questions que nous nous posons est celle de l'échelle spatiale d'analyse : deux échelles d'espace sont en effet envisageables.

La première est l'échelle microscopique. A ce niveau, la partie solide d'une part, et la ou les parties fluides d'autre part, occupent des domaines géométriques distincts dans un volume élémentaire de milieu poreux. Un point géométrique se trouve donc à un instant donné dans une des phases solide ou fluides bien identifiée. Cette échelle microscopique a la

dimension du pore. C'est à cette échelle qu'est écrit l'ensemble des équations mécaniques, physiques et/ou chimiques régissant les comportements des phases et les interactions entre celles-ci. C'est donc naturellement l'échelle adaptée à la résolution des problèmes de "taille microscopique", tels que les problèmes interfaciques par exemple.

Dans un milieu poreux, la porosité se scinde en deux parties distinctes. D'une part, la porosité connectée correspond à l'espace interstitiel continu, ou connecté, où s'effectue l'écoulement de la ou des phases fluides. Deux points appartenant à un même fluide sont alors reliés par un trajet interne continu. D'autre part, la porosité occluse, saturée de fluide ou non, piégée dans la matière, n'est quant à elle le lieu d'aucun écoulement fluide. La matrice du milieu poreux est alors constituée de la partie matérielle solide du volume élémentaire et de sa porosité occluse, cf. figure 1.1. La porosité est dans la suite assimilée à la porosité connectée et est notée ϕ . Elle correspond au ratio volume de l'espace connecté sur volume total élémentaire.

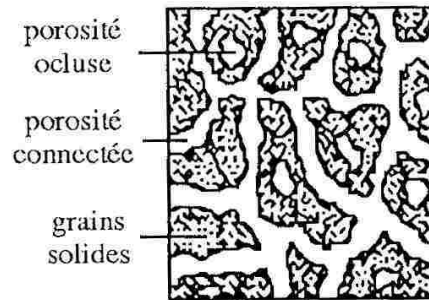


FIG. 1.1 – Définitions de la matrice et des différentes porosités à l'échelle microscopique, d'après Coussy [COU91].

La ou les phases fluides combtent totalement ou partiellement l'espace poreux du volume élémentaire. Si un unique fluide occupe totalement l'espace poreux, alors le milieu est saturé. Notons cependant que ce fluide n'est pas nécessairement homogène, il peut présenter plusieurs composantes, un solvant et plusieurs solutés par exemple. Dans le cas où la saturation est partielle, plusieurs fluides distincts coexistent : le cas le plus courant est celui où une troisième phase de type gazeuse est prise en compte, l'air par exemple. Plusieurs phases fluides différentes apparaissent alors dans l'étude des milieux poreux non saturés.

La seconde approche se place au niveau macroscopique. Cette échelle macroscopique est adaptée à l'étude des problèmes "à taille humaine" tels que ceux rencontrés en mécanique des sols et des structures, en géomécanique ou bien encore en sismologie. L'étude des problèmes d'ingénierie au sens large en géosciences nécessite donc de travailler à cette échelle.

Au niveau macroscopique, le volume élémentaire est modélisé par la superposition de plusieurs particules matérielles occupant aux mêmes instants les mêmes points géométriques mais avec des cinématiques a priori différentes, cf. figure 1.2.

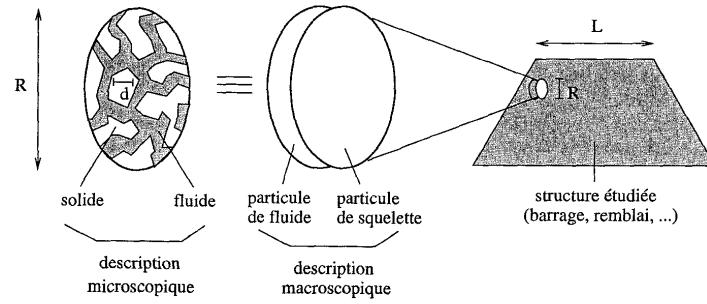


FIG. 1.2 – Les différentes échelles spatiales du milieu poreux, d'après Dormieux et Bourgeois [DOR02].

Le choix de la taille du volume élémentaire doit répondre à deux objectifs. D'une part, il doit être représentatif du milieu poreux, à savoir il doit être d'un ordre de grandeur suffisamment grand spatialement pour fournir une modélisation pertinente de l'ensemble des phénomènes physiques microscopiques. On parle de v.e.r. pour volume élémentaire représentatif. D'autre part, son étendue spatiale doit être très inférieure à la dimension du problème macroscopique posé, permettant ainsi une description continue de la matière. Si nous désignons par L la taille caractéristique du système étudié, par R l'ordre de grandeur de l'étendue spatiale du volume élémentaire représentatif et par d la dimension caractéristique des pores, cf. figure 1.2, les conditions précédentes sur les différentes échelles de perception d'un milieu poreux se résument de la façon suivante :

$$d \ll R \ll L$$

Le milieu poreux est donc traité par une description continue de la matière, et est considéré comme un milieu continu classique mais généralisé à plusieurs phases, c'est-à-dire comme une superposition de plusieurs milieux continus. Le squelette est défini macroscopiquement comme l'addition de la matrice, qui en constitue la partie matérielle, et de l'espace poreux connecté : c'est la phase solide coïncidant avec la ou les phases fluides occupant l'espace poreux connecté, cf. figure 1.3. Précisons que le milieu poreux a un caractère de milieu ouvert de par l'existence des mouvements différentiels entre les différentes phases. Les équations poroélastiques propres et de couplage sont alors écrites pour les différentes phases moyennées solide et fluide(s).

Notons bien que nous ne nous soucions plus ici de la géométrie réelle du milieu poreux élémentaire qui relève de l'approche microscopique.

Enfin, pour conclure, historiquement, c'est au niveau de cette échelle macroscopique que les premières études concernant les écoulements dans les milieux poreux (Darcy) et l'étude du comportement mécanique des milieux poreux (Terzaghi, Biot) ont été menées.

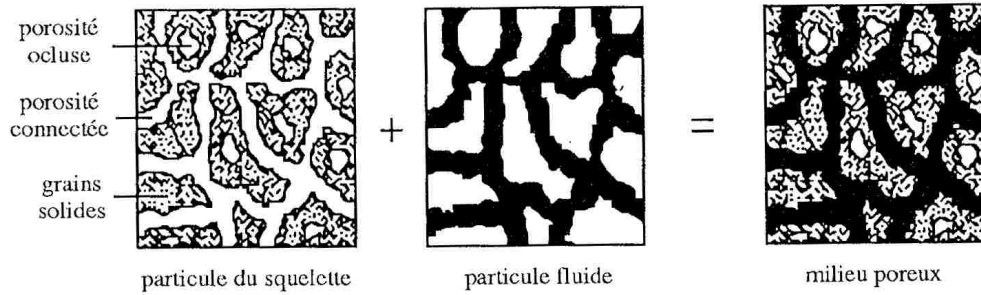


FIG. 1.3 – Présentation des différentes phases du milieu poreux, d'après Coussy [COU91].

1.3 Approches microscopique et macroscopique

1.3.1 Point de vue microscopique

Le changement d'échelle microscopique-macroscopique a été notamment étudié par Auriault [AUR80], Burrige et Keller [BUR81] et Auriault et al. [AUR85]. Nous pouvons également citer deux articles récapitulatifs plus récents de Terada et al. [TER98], et de Coussy et al. [COU98] sur cette problématique, ainsi que l'ouvrage de Dormieux et Bourgeois [DOR02].

Les auteurs considèrent le mélange solide-fluide et posent à l'échelle du pore les équations mécaniques propres et de couplage du mélange. L'homogénéisation s'effectue ensuite soit par développements asymptotiques soit par des procédures de moyennisation : elle conduit aux équations de Biot macroscopiques sur lesquelles nous reviendrons par la suite. Les caractéristiques macroscopiques des termes intervenant dans les équations se trouvent ainsi justifiées par cette homogénéisation et sont exprimées à l'aide des caractéristiques microscopiques.

Les équations du mélange solide-fluide au niveau microscopique sont celles de l'élasticité hookéenne pour le solide et de Navier-Stokes linéarisées pour le fluide newtonien. Les termes d'inertie des équations de Navier-Stokes sont négligés au vu du faible nombre de Reynolds et les auteurs traitent donc des équations de Stokes. Des contraintes appropriées sont écrites à l'interface microscopique solide-fluide. Dans l'expression des contraintes d'interaction microscopique, il est important de noter que la contribution de la partie visqueuse est négligeable par rapport à la contribution de la pression, Dormieux et Bourgeois [DOR02]. Le rapport des deux contributions est de l'ordre de grandeur du ratio échelle microscopique sur échelle macroscopique. C'est pourquoi la répartition des contraintes dans le fluide est quasiment hydrostatique, bien que la viscosité joue un rôle majeur dans l'écoulement.

1.3.2 Point de vue macroscopique : approche de Biot

L'approche macroscopique est plus ancienne et revient à Terzaghi (années 20) et Biot (années 50). La théorie de Terzaghi se limite à des équations découplées entre l'écoulement de la phase fluide et la déformation de la phase solide. Le travail de Biot est une extension des recherches de Terzaghi. Une série d'articles sur ce sujet sert de base à la problématique de la mécanique ondulatoire des milieux poreux : [BIO41], [BIO55], [BIO56a], [BIO56b], [BIO56c], [BIO62a] et [BIO62b]. Cette modélisation est justifiée a posteriori par l'approche microscopique du paragraphe précédent.

Dans un premier temps, Biot traite de la théorie de la déformation avec l'écriture générale des relations contraintes-déformations solide et fluide d'un milieu poreux isotrope [BIO41] et anisotrope [BIO55] grâce à une approche énergétique.

Les trois articles de Biot, [BIO56a] [BIO56b] [BIO56c], sont des articles de référence pour la propagation des ondes dans un milieu poreux. L'écoulement du fluide est d'abord supposé suivre un modèle de Poiseuille [BIO56a] à faible fréquence. L'approche énergétique conduit à la mise en évidence de deux ondes de dilatation, ondes P , l'une dite "rapide" et l'autre "lente", et une onde de cisaillement, onde S . L'extension apportée par l'article [BIO56b] concerne le cas des plus hautes fréquences où l'écoulement de Poiseuille est mis en défaut. L'auteur introduit alors un terme correctif à cet écoulement sous la forme d'un facteur structural représentant les effets de la viscosité et de la forme des pores. Son effet sur les trois ondes est alors discuté. Le troisième article [BIO56c] généralise l'étude de la propagation des ondes dans un milieu poreux au cas du squelette solide anisotrope et viscoélastique.

Les deux articles de 1962, [BIO62a] [BIO62b], ont pour objectif une reformulation plus générale des travaux antérieurs incluant l'anisotropie du milieu, la viscoélasticité et la dissipation interne du solide. Après réécriture des équations gouvernant le milieu poreux avec une explication détaillée des paramètres y figurant, dans un cas isotrope ou anisotrope, l'auteur introduit des opérateurs complexes. Ceux-ci correspondent d'une part aux différents modèles de viscoélasticité proposés et d'autre part à la dissipation interne propre au solide. Les écritures des équations en termes de propagation sont alors présentées sous une forme générale incluant ces différents opérateurs.

1.4 Equations du modèle poroélastique de Biot

Nous présentons ici l'ensemble des équations du modèle de Biot telles que nous les utilisons par la suite. Notre but ici n'est pas de les redémontrer mais de les formuler en insistant sur la signification physique des grandeurs qui y figurent. En effet, le lecteur intéressé par leur démonstration pourra se référer par exemple aux articles de Biot [BIO41] [BIO56a] ou bien aux ouvrages de Bourbié et al. [BOU86], et Coussy [COU91]. L'approche énergétique classique en mécanique des milieux continus est utilisée avec les potentiels

des déformations et des dissipations, la densité d'énergie cinétique et les équations de Lagrange.

Avant d'aller plus loin, quelques hypothèses de travail et quelques précisions s'imposent. Tout d'abord, le formalisme lagrangien est privilégié car, d'une manière générale et en pratique, l'information principale est portée par les mouvements du squelette solide. La démarche lagrangienne classiquement utilisée en mécanique des solides déformables s'impose donc. Les différents termes de déformation et de vitesse sont formulés dans le cadre des petites perturbations, aussi bien pour la phase solide que fluide. Les transformations macroscopiques du squelette solide et du fluide sont infinitésimales. Le fluide compressible est unique et sature totalement le milieu : l'étude, sauf indication contraire, est donc menée dans le cadre des milieux poreux saturés. Le milieu est isotrope. Notons enfin que la longueur d'onde des différentes ondes pouvant se propager dans le milieu est grande devant les dimensions du volume élémentaire représentatif. Le couplage thermomécanique n'est pas étudié.

Une écriture indicielle est utilisée : l'indice $(\cdot)_{,i}$ et l'exposant $(\cdot)$ représentent respectivement les dérivées spatiale et temporelle. La convention de sommation est appliquée et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

1.4.1 Lois de comportement

Les deux lois de comportement se présentent sous la forme :

✓ première loi de comportement :

$$\sigma_{ij} = \lambda_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta p \delta_{ij} \quad (1.1)$$

✓ seconde loi de comportement :

$$-\phi (U_{i,i} - u_{i,i}) = \beta u_{i,i} + \frac{1}{M} p \quad (1.2)$$

σ_{ij} représentent les composantes du tenseur des contraintes globales du milieu poreux. Aucune distinction n'est faite entre les contraintes supportées par la particule solide et celles supportées par la particule fluide. A ce propos, il est utile de préciser que l'on trouve dans la littérature la notion de contraintes effectives : elles correspondent à la portion des contraintes globales s'exerçant uniquement sur le squelette solide.

Nous nous plaçons dans le cadre des petites perturbations : les termes u_i correspondent aux composantes du déplacement macroscopique de la phase solide, ce qui se traduit ici pour les composantes du tenseur des déformations du squelette par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

La répartition des contraintes dans le fluide étant hydrostatique, la contrainte moyenne fluide s'exprime sous la forme :

$$\sigma_{ij}^f = -\phi p \delta_{ij}$$

Le signe négatif traduit le fait que la pression fluide p positive génère une contrainte par convention négative. La déformation volumique de la phase fluide est représentée par sa dilatation, ou teneur en fluide, définie par :

$$\theta = U_{i,i}$$

Les termes U_i correspondent aux composantes du déplacement macroscopique de la phase fluide. La porosité est notée ϕ .

Insistons sur les grandeurs suivantes :

- ✓ μ est le module de cisaillement du milieu poreux ou premier coefficient de Lamé. Il n'est fonction que de la phase solide du milieu, la phase fluide ne reprenant pas les efforts de cisaillement.
- ✓ λ_0 est le second coefficient de Lamé du milieu poreux. L'indice 0 caractérise un milieu ouvert ou drainé. Le système ouvert ou drainé est un milieu poreux dans lequel la pression fluide reste indépendante de la sollicitation et dans lequel le fluide en excès a eu le temps de s'échapper. Ainsi, pour un système drainé en l'absence de pression fluide ($p = 0$), nous identifions dans l'équation (1.1) le second coefficient de Lamé λ_0 par analogie avec l'élastodynamique. En contrepartie, le système fermé ou non drainé, indicé par C , correspond à une configuration où la teneur en fluide dans le milieu est constante ($\theta = 0$), ceci lorsqu'il y a absence d'échange de masse fluide.
- ✓ M est le premier coefficient de Biot et sa signification physique est la suivante : il correspond linéairement à la pression à appliquer pour modifier la teneur en fluide tout en maintenant constant le volume macroscopique solide du milieu, $u_{i,i} = 0$ dans (1.2). Il est donc naturellement relié aux coefficients d'incompressibilité de la matrice solide constituant le squelette et celui de la phase fluide.
- ✓ β est le second coefficient de Biot. C'est un terme de **couplage élastique**. En effet, pour un système drainé en l'absence de pression fluide, $p = 0$ dans (1.2), il apparaît que β couple les deux phases solide et fluide en reliant le changement de volume macroscopique solide à la variation de teneur en fluide du milieu. Il est donc également relié aux coefficients d'incompressibilité du système drainé et de la matrice solide constituant le squelette.

1.4.2 Equations du mouvement

En l'absence de force volumique, les équations du mouvement s'écrivent comme suit :

✓ équation du mouvement global :

$$\sigma_{ij,j} = (1 - \phi)\rho_s\ddot{u}_i + \phi\rho_f\ddot{U}_i \quad (1.3)$$

✓ équation du mouvement caractérisant l'écoulement de la phase fluide, loi de Darcy généralisée :

$$p_{,i} = -\frac{\phi}{K}(\dot{U}_i - \dot{u}_i) + \rho_f(a - 1)\ddot{u}_i - a\rho_f\ddot{U}_i \quad (1.4)$$

ρ_s et ρ_f représentent les masses volumiques respectivement du grain solide constituant la matrice et du fluide.

Insistons sur les grandeurs suivantes intervenant dans l'expression (1.4) :

✓ K est la perméabilité hydraulique du milieu. Elle se définit par :

$$K = \frac{k}{\mu_v}$$

où k est la perméabilité absolue du milieu (en m^2 ou usuellement en Darcy avec $1\text{D} = 10^{-12}\text{m}^2$) et μ_v la viscosité dynamique du fluide (en Pa.s). K est donc un terme de **couplage visqueux** traduisant la dissipation énergétique due au mouvement relatif fluide-matrice. La loi de Darcy classique se retrouve dans le cas de l'écoulement permanent sans termes d'inertie ni de tortuosité : $\ddot{u} = \ddot{U} = 0$, $a = 0$. Enfin, notons qu'en mécanique des sols, il est parfois d'usage de travailler avec une autre perméabilité définie par $K^* = \rho_f g K$ de dimension ms^{-1} , la différence d'approche émanant de la définition de la charge hydraulique.

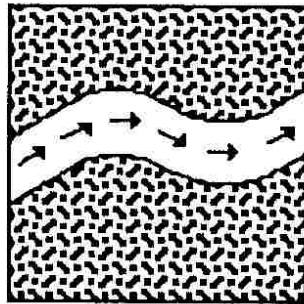


FIG. 1.4 – Effet de tortuosité à l'échelle microscopique, d'après Coussy [COU91].

✓ a est la tortuosité du milieu poreux. Elle traduit le caractère tortueux microscopique (sinuosité géométrique) du chemin où a lieu l'écoulement du fluide. Elle est donc fonction de la porosité et de la forme des canaux connectés, cf figure 1.4. L'expression $a = (1 + 1/\phi)/2$ a par exemple été formulée par Berryman [BER80] dans le cas où la matrice est constituée de grains solides sphériques. Notons que a est un nombre sans dimension. C'est un terme de couplage **massique ou inertiel** et il est souvent exprimé dans la littérature à l'aide d'une masse volumique ajoutée, Bourbié et al. [BOU86], ou Chen [CHE94a] [CHE94b]. Il apparaît donc comme un ajout de masse sur la phase solide et sur la phase fluide. Il y a alors une modification de l'inertie des deux phases par ce couplage.

1.4.3 Relations entre les coefficients du modèle de Biot

Soient K_0, K_c, K_s et K_f respectivement les modules d'incompressibilité du milieu poreux drainé, du milieu poreux fermé, des grains solides de la matrice constituant macroscopiquement le squelette solide, et de la phase fluide.

Les deux coefficients de Biot s'expriment en fonction des modules d'incompressibilité et de la porosité sous la forme suivante, Bourbié et al. [BOU86] :

$$\beta = 1 - \frac{K_0}{K_s}$$

et

$$\frac{1}{M} = \frac{\beta - \phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f}$$

La relation entre le module d'incompressibilité et les paramètres de Lamé est donnée par : $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$. Le système fermé est relié au système drainé par la relation suivante : $K_0 = K_c - \beta^2 M$.

1.4.4 Cas particuliers et cas limites

Il peut être intéressant de préciser les valeurs des paramètres du problème pour les cas limites suivants :

✓ cas du milieu purement **solide**, les paramètres correspondants sont :

- $\phi = \beta = 0$
- $\lambda_0 = \lambda_s$
- M et $a \rightarrow \infty$
- $K \rightarrow 0$

✓ cas du milieu purement **fluide**, les paramètres correspondants sont :

- $\phi = \beta = 1$
- $M = K_f$ et $a \rightarrow 1$
- $\mu = \lambda_0 = 0$

- $K \rightarrow \infty$

- ✓ absence de **mouvement relatif** fluide-solide : nous avons alors $u_i = U_i$ soit absence de mouvement relatif entre les deux phases.

Par ailleurs, l'article de Zienkiewicz et al. [ZIE80] est intéressant car les auteurs rappellent les équations de Biot pour la modélisation de milieux poreux dans le cas général non linéaire puis linéarisé et analysent d'un point de vue théorique et analytique les cas limites suivants :

- ✓ hypothèse de consolidation, correspondant au cas quasi-statique, pour lequel les termes d'accélération sont négligés,
- ✓ hypothèse d'absence de mouvement relatif solide-fluide présentée ci-dessus,
- ✓ hypothèse d'écoulement à forte perméabilité du fluide.

1.5 Présentation des différentes ondes se propageant dans un milieu semi-infini poreux continu biphasique

Les problèmes de propagation d'ondes dans les milieux poreux continus biphasiques font intervenir des ondes volumiques et une onde surfacique si le milieu présente une surface libre. Cette section en rappelle les principales caractéristiques.

1.5.1 Les ondes volumiques

Il existe dans un massif infini trois ondes volumiques qui se propagent de manière sphérique à partir de l'excitation. Deux de ces trois ondes sont des ondes primaires et la troisième est une onde secondaire.

- ✓ les **ondes primaires** $P1$ et $P2$: ce sont des ondes de compression encore appelées ondes de dilatation ou ondes irrotationnelles. La déformation générée est longitudinale, elle a lieu dans la même direction que la direction de propagation de l'onde.

La première onde de compression $P1$, encore appelée onde de première espèce, est fréquemment dite "rapide" et peu atténuée alors que la seconde onde $P2$, ou onde de seconde espèce, est dite "lente" et fortement atténuée. Nous reviendrons sur ces caractéristiques au chapitre 2. Les deux ondes de compression existent dans les deux phases solide et fluide : penser que l'onde $P1$ existe uniquement dans la phase solide et que l'onde $P2$ est liée à la phase fluide est une erreur.

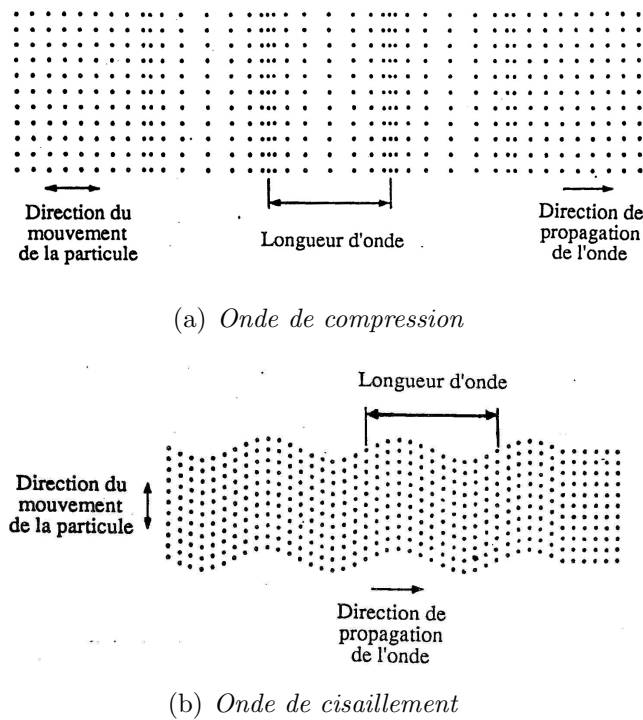


FIG. 1.5 – Ondes volumiques, d'après Graff [GRA75].

- ✓ l'onde secondaire S : il s'agit d'une onde de cisaillement encore appelée onde transversale ou onde équivolumique. La déformation générée est transversale, elle a lieu perpendiculairement à la direction de propagation.

Les figures 1.5 (a) et (b) illustrent les mouvements longitudinal et transversal des particules générés respectivement par une onde de compression et de cisaillement.

1.5.2 L'onde superficielle de Rayleigh

En présence d'une surface libre pour un massif semi-infini, il apparaît un troisième type d'onde, dite onde superficielle ou onde de surface. C'est Rayleigh le premier qui a démontré son existence en élastodynamique : elle porte donc le nom d'**onde de Rayleigh** et est notée onde R . Il s'agit d'une onde particulièrement importante dans la mesure où elle est beaucoup plus énergétique que les ondes volumiques. Une comparaison des énergies véhiculées par les différentes ondes en élastodynamique est fournie par Lefeuvre-Mesgouez [LM99].

Une seconde caractéristique de l'onde R est sa décroissance exponentielle en profondeur du massif : il s'agit véritablement d'une onde de surface. Prépondérante en surface, sa contribution s'annule très vite en profondeur où les ondes volumiques sont alors prépondérantes.

Dans le cas de l'onde de Rayleigh, la déformation engendrée correspond à un mouvement des particules elliptique et rétrograde par rapport à la direction de propagation de l'onde. La figure 1.6 en illustre le mouvement.

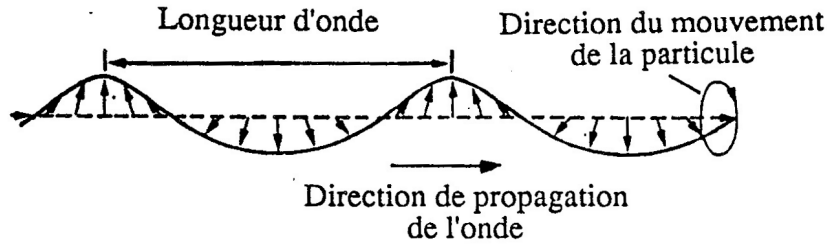


FIG. 1.6 – Onde de Rayleigh, d'après Graff [GRA75].

Des expressions simples et directes dans un cas général des vitesses des quatre ondes précédentes n'existent pas. Une détermination de ces célérités nécessite un travail théorique sur lequel nous reviendrons au chapitre 2. Notons néanmoins que l'onde la plus rapide est toujours $P1$ et que les ondes S et R ont des vitesses très proches. L'ordre entre les différentes célérités est fonction de la nature du milieu.

1.6 Amortissement physique interne propre au sol : amortissement viscoélastique hystérétique de Rayleigh

Dans le cas d'un massif théorique, le seul facteur de décroissance des amplitudes des ondes se propageant est la distance. Cette décroissance est dite géométrique. Pour un massif réel, l'amortissement interne propre au sol doit être introduit et pris en compte dans la modélisation. Il provient par exemple de la viscoélasticité de la matrice, des forces capillaires ou encore des mouvements locaux de fluide occlus.

L'amortissement physique choisi est de type viscoélastique. Il traduit la dissipation physique propre au sol poreux outre les phénomènes de couplage précédents, et introduit, dans la loi de comportement, en plus de la partie élastique, une partie visqueuse. Celle-ci fait apparaître un terme en dérivée partielle. Par analogie avec l'élastodynamique, pour un système ouvert, en l'absence de pression fluide ($p = 0$), les composantes du tenseur des contraintes globales du milieu poreux s'écrivent :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \left[\lambda_0 + \lambda'_0 \frac{\partial}{\partial t} \right] \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \left[\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right] \varepsilon_{ij} \\ &= \lambda_0 \left[1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right] u_{k,k} \delta_{ij} + \mu \left[1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right] (u_{i,j} + u_{j,i})\end{aligned}\quad (1.5)$$

où λ_0 et μ correspondent aux termes purement élastiques et $\lambda'_0 \frac{\partial}{\partial t} = \eta \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}$ et $\mu' \frac{\partial}{\partial t} = \eta \mu \frac{\partial}{\partial t}$ correspondent aux termes purement visqueux.

Cet amortissement est appelé amortissement de Rayleigh de coefficient η (en seconde). Il est identique pour les deux coefficients de Lamé.

De plus, cet amortissement est dit hystérétique s'il est indépendant de la fréquence de la sollicitation appliquée.

Les différents amortissements physiques internes du sol sont synthétisés notamment par Le Houédec [LEH95] et Lefeuvre-Mesgouez [LM99].

1.7 Résultats sur les milieux poreux

Nous avons préférentiellement effectué notre étude bibliographique dans le cadre des régimes transitoires. Cependant, nous n'avons pas omis l'étude du régime permanent car celui-ci, plus abondamment traité, apporte de précieuses informations sur les techniques développées ainsi que sur les commentaires physiques des résultats obtenus.

Cette section se scinde en trois sous-sections : en premier lieu, nous nous intéressons aux principaux résultats analytiques et semi-analytiques obtenus dans le cadre de l'étude de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux continu biphasique. Nous effectuons ensuite une large revue bibliographique centrée sur les travaux numériques. Enfin, une courte approche expérimentale validant les résultats obtenus théoriquement ou numériquement conclut l'analyse bibliographique.

1.7.1 Approches analytiques et semi-analytiques

L'objet de cette section est de présenter les principaux travaux théoriques traitant de l'étude de la réponse dynamique d'un milieu poreux à une charge impulsionnelle ou harmonique. Les approches analytiques et semi-analytiques rencontrées dans la littérature font classiquement appel à la transformée de Laplace ou bien à la transformée de Fourier sur la variable temporelle et/ou sur les variables d'espace. Beaucoup de résultats sont ainsi obtenus dans les domaines transformés de Laplace ou de Fourier et le retour au domaine temporel s'effectue soit analytiquement, soit plus fréquemment numériquement.

Il existe plusieurs types de formulations présentés dans la bibliographie :

- ✓ la formulation en déplacements solides - déplacements fluides $\{u - U\}$,
- ✓ la formulation en déplacements solides - pression fluide $\{u - p\}$,
- ✓ la formulation en déplacements solides - pression fluide - déplacements fluides $\{u - p - U\}$.

Les solutions analytiques complètes de la théorie de Biot ont d'abord été formulées en régime harmonique. Nous revenons sur les articles de références concernant l'étude des régimes permanents au début du chapitre 2. Les résultats obtenus sont alors utiles à la compréhension de la problématique en transitoire.

Dans le cadre du régime transitoire, on note dans un premier temps les travaux de Simon et al. [SIM84] et de Gajo et Mongiovi [GAJ95] qui traitent de problèmes 1D sous hypothèse de compatibilité dynamique pour les premiers et sans tortuosité dans les deux cas. Ces travaux servent fréquemment de validation à un certain nombre d'études numériques. L'hypothèse de compatibilité dynamique est présentée et utilisée dans le chapitre 4 section 2.

Le premier auteur à proposer la solution complète sans hypothèse restrictive de la théorie de Biot dans les domaines transformé et temporel en 2D et 3D est Chen [CHE94a] [CHE94b]. Ainsi, Chen explicite les équations de Biot adimensionnées complètes dans le domaine transformé de Laplace. Les sollicitations correspondent soit à un Dirac, soit à une fonction de Heaviside. La formulation est faite en $\{u, p\}$. Le retour au domaine temporel se fait à l'aide d'une transformée inverse temporelle de Laplace ou bien numériquement. Dans le domaine spatial et temporel, l'auteur obtient donc les fonctions de Green des équations complètes de Biot. Différents cas académiques sont traités, avec une vérification des résultats obtenus dans le cas élastodynamique. Une liaison avec la méthode des éléments de frontière est proposée.

Une autre approche 3D complète est proposée par Schanz [SCH01] : les résultats dans le domaine transformé de Fourier pour l'espace et de Laplace pour le temps sont obtenus par la méthode de Lubich et le retour dans le domaine temporel réel se fait par une procédure numérique en pas à pas.

Zhou et al. [ZHO03] présentent l'étude de la réponse d'un milieu poreux en géométrie cylindrique à une sollicitation enterrée transitoire. Les transformées utilisées sont celles de Laplace-Hankel et les inversions intégrales sont faites numériquement. Une comparaison avec le milieu semi-infini purement élastique est effectuée.

Citons pour conclure les deux articles récents de Gatmiri et Jabbari [GAT05a] et [GAT05b] qui généralisent le travail précédent de Chen au cas d'un sol partiellement saturé.

Ces dernières publications montrent que des travaux analytiques et semi-analytiques sont toujours en cours dans le cadre de la problématique étudiée.

1.7.2 Approches numériques

Les méthodes analytiques et semi-analytiques sont intéressantes car elles permettent d'appréhender un certain nombre de problèmes. Cependant, elles restent limitées à des géométries simples. C'est pour cette raison que le relais est souvent pris par des méthodes numériques qui permettent d'envisager des problèmes plus généraux : hétérogénéité de propriétés mécaniques, modélisation d'appareils de mesure, discontinuité géographique de type obstacle par exemple. Les solutions analytiques servent alors de références et

permettent de valider les approches numériques dans les cas simples.

Dans le cas d'un sol semi-infini, on ne peut mailler le domaine dans son intégralité : seule la zone qui nous intéresse est modélisée. La prise en compte du reste du massif dépend des choix effectués et du régime étudié :

- ✓ la solution la plus directe est de tronquer le massif semi-infini à une certaine distance de la source. C'est une solution classique dans le domaine temporel, chaque résultat est ainsi valide sur une certaine durée. Le maillage est choisi par rapport à cette durée d'étude et par rapport aux points d'étude désirés. Le calcul des champs dits proches permet de ne pas dépendre des conditions aux frontières. Cette approche est particulièrement adaptée aux problèmes transitoires.
- ✓ une autre solution consiste à modéliser par des frontières absorbantes ou par des éléments infinis le massif hors zone d'étude. L'objectif est alors d'éliminer les ondes venant se réfléchir à la frontière du domaine d'étude maillé et qui parasiteraient alors le signal. Ces techniques sont essentiellement développées en régime permanent.
- ✓ enfin, la méthode des éléments de frontière est une dernière alternative à la troncature du massif semi-infini en régime transitoire ou permanent.

La principale méthode numérique utilisée pour la simulation de la propagation d'ondes en régimes transitoire ou permanent dans les milieux poreux est la méthode des éléments finis. D'autres méthodes existent cependant comme la méthode des différences finies ou la méthode des éléments de frontière.

• Approche éléments finis en régime transitoire

Dans le cadre d'un régime transitoire, Ghaboussi et Wilson [GHA72] sont les premiers à proposer une approche numérique par éléments finis basée sur le modèle de Biot. Néanmoins, les auteurs ne prennent pas en compte la notion de tortuosité. Ils introduisent artificiellement un amortissement structural et donnent un résultat en 1D pour une sollicitation normale de Heaviside.

Prevost propose une variante du modèle de Biot sans tortuosité dans l'écriture de la loi de comportement d'un fluide incompressible en reliant la pression non pas à la divergence des déplacements solide et fluide mais à la divergence des vitesses, [PRE82]. La formulation éléments finis obtenue ne fait pas intervenir explicitement les déplacements. Les applications concernent un exemple 1D en transitoire et des cas quasistatiques en 2D pour une sollicitation de Heaviside.

Par la suite, Zienkiewicz et Shiomi [ZIE84] présentent de manière générale une formulation éléments finis des équations de Biot toujours sans tortuosité en $\{u, p, U\}$. Trois types de formulations sont étudiés et comparés :

- ✓ une formulation exacte $\{u, U\}$ pour un fluide compressible. La résolution temporelle du système du deuxième ordre est effectuée à l'aide du schéma de Newmark explicite en faisant l'hypothèse d'une matrice masse globale diagonale.
- ✓ une formulation approchée $\{u, U\}$ pour un fluide incompressible pour laquelle le terme de pression est approché par la méthode des pénalités rejoignant ainsi la méthode proposée par Prevost.
- ✓ une formulation approchée $\{u, p\}$, pour laquelle le terme d'accélération fluide est négligé.

Une comparaison des différentes méthodes est proposée pour une sollicitation de Heaviside ou une simulation de tremblement de terre. Les auteurs mettent en évidence des oscillations numériques importantes pour la formulation exacte $\{u, U\}$ en 2D qui peuvent être réduites par l'introduction artificielle d'un amortissement numérique.

Simon et al., [SIM86a] [SIM86b], présentent un travail de synthèse sur les diverses formulations éléments finis existantes et sur les différentes techniques de résolution temporelle. L'objectif est d'étudier la précision des résultats en comparant les approches à une approche théorique présentée dans [SIM84]. Les résultats concernent des cas 1D pour lesquels la sollicitation est un créneau ou correspond à une excitation triangulaire. Le modèle de Biot est toujours sans tortuosité et une hypothèse de compatibilité dynamique est utilisée.

Dans le cas d'un fluide et d'un solide incompressibles, Gajo et al. [GAJ94] résolvent directement la formulation en $\{u, p, U\}$. Les auteurs présentent essentiellement des résultats sans tortuosité en 1D et les comparent à une solution analytique décrite dans [GAJ95]. Cette approche analytique est intéressante car elle illustre le mécanisme de dispersion en fonction de la perméabilité du milieu pour un régime transitoire en étudiant notamment la distorsion des fronts d'onde due à une excitation de Heaviside.

L'article résumé de Han et al. [HAN98] couple l'étude complète en $\{u, U\}$ des équations de Biot en régime transitoire à une frontière absorbante. La sollicitation est une onde de Ricker, des résultats 3D issus d'une superposition de résultats 1D sont présentés et synthétisent divers articles de la revue *Geophysics*.

Enfin, Zhao et al. [ZHA05] proposent la résolution du modèle de Biot $\{u, U\}$ en 2D sans tortuosité à l'aide d'une méthode explicite originale par éléments finis mixée à la méthode des différences finies pour les discrétisations spatiale et temporelle. L'objectif est de diminuer les coûts en termes de temps de calcul et d'espace mémoire, et la méthode est validée en 1D par rapport à l'article de Simon et al. [SIM84]. Une comparaison intéressante entre la réponse d'une plaque rigide posée sur un sol biphasique de Biot et sur un sol monophasique, en élastodynamique, est également proposée. Ces résultats mettent en

évidence les différences de réponses entre les modélisations monophasique et biphasique d'un sol.

Pour conclure, il existe en fait peu de résultats 2D en régime transitoire. En 3D, le travail de Han et al. [HAN98] est issu d'une superposition de résultats 1D et à notre connaissance, la bibliographie ne présente aucun "véritable" résultat 3D. De plus, la plupart des articles ne prennent pas en compte la notion de tortuosité. Enfin, l'introduction d'un amortissement physique interne au sol est souvent occultée.

• Approche éléments finis en régime permanent

Dans le cadre de l'étude du régime permanent traitant des équations de Biot, la littérature est plus abondante. Elle s'étend au domaine de l'acoustique où le fluide du milieu poreux est l'air.

Ainsi, Hörlin et al., [HOR01] [HOR05], proposent une formulation éléments finis hiérarchique en $\{u, U\}$ des équations de Biot en 3D pour la propagation d'ondes acoustiques à basse fréquence dans un milieu poreux mono ou multicouches : les fonctions d'interpolation sont alors les premiers termes d'une série. Les auteurs ajoutent une composante visqueuse aux propriétés du solide et du fluide correspondant à l'amortissement interne du milieu. Des mesures d'erreurs globales et de rapidité de convergence sont déterminées pour mesurer l'efficacité de la formulation hiérarchique et une comparaison de cette formulation avec une formulation éléments finis classique est effectuée sur une mousse de PU saturée en air. L'objectif de la méthode hiérarchique est de rechercher une précision équivalente à la méthode classique mais avec un raffinement de maillage moins contraignant : un maillage plus grossier peut ainsi être envisagé.

Dans le domaine de l'acoustique, on retrouve la même formulation éléments finis en $\{u, U\}$ dans les thèses de doctorat respectivement de Panneton [PAN96], et de Dauchez [DAU99]. Ces derniers ont adapté la théorie de Biot à l'acoustique et travaillent en régime harmonique. Une adaptation de la théorie de Biot aux ordres de grandeurs de l'acoustique (fortes différences de rigidité air-matrice), à la mise en place d'un couplage thermique et à une meilleure prise en compte du couplage visqueux avec l'introduction d'une couche limite fonction de la fréquence d'excitation est effectuée. Une étude de convergence intéressante, initiée par Panneton, est présentée par Dauchez et al. [DAU01]. Un critère de convergence est validé en 1D et 2D. Enfin, une analyse des différentes sources de dissipation énergétique viscoélastique, visqueuse et thermique, confirmée par une étude expérimentale, se trouve dans l'article de Dauchez et al. [DAU03].

Une autre approche correspond à une formulation en $\{u, p\}$: l'article de Atalla et al. [ATA98] présente cette formulation et met en évidence ses avantages. On peut citer notamment l'avantage en temps de calcul du fait de remplacer en 3D les 3 inconnues du

déplacement de la phase fluide U par un unique degré de liberté correspondant au terme de pression. Les auteurs présentent une formulation exacte en régime harmonique. Ils valident leur approche en 2D et 3D par comparaison avec la formulation exacte $\{u, U\}$. Notons qu'aucune hypothèse supplémentaire n'est effectuée dans cet article alors que pour Zienkiewicz et Shiomi [ZIE84], l'accélération fluide était négligée et pour Göransson [GOR95], les deux phases étaient découplées.

Une formulation éléments finis $\{u, p\}$ en mécanique des sols est également étudiée dans le cadre d'un sol isotrope transverse chez Jeng et Lin [JEN00]. L'influence de cette anisotropie est présentée. Citons enfin à propos de cette formulation $\{u, p\}$ les articles d'optimisation numérique suivants : Ferronato et al. [FER01] et Gambolati et al. [GAM01]. Ils posent le problème éventuel du mauvais conditionnement de la résolution temporelle de la formulation éléments finis des milieux poreux dans des cas quasistatiques. Enfin, Li et al. [LI03] proposent un algorithme de résolution temporelle fractionnel stable et le comparent aux algorithmes usuels de résolution de l'approche $\{u, p\}$.

Une dernière formulation est proposée par Göransson [GOR98]. Celui-ci introduit dans les équations de Biot un potentiel ϕ correspondant au déplacement fluide défini par $u_i = \phi_i$. L'hypothèse supplémentaire d'un fluide irrotationnel doit être faite. La formulation en régime permanent est donc effectuée avec 5 inconnues : la pression fluide, le potentiel fluide et les 3 déplacements solides. L'approche éléments finis est du type Galerkin standard. Cet article est orienté vers une application industrielle de réductions des nuisances sonores.

Pour conclure, citons l'article de Khalili et al. [KHA99] qui s'intéresse spécifiquement au couplage éléments finis - éléments infinis en régime permanent. Le problème modélisé est celui d'une couche d'épaisseur fixe mais infinie dans les deux autres directions. Les auteurs développent alors un élément infini associé à cette géométrie et montrent la précision du couplage éléments finis - éléments infinis en comparant leurs résultats à une modélisation purement éléments finis coûteuse numériquement, une troncature brutale, une frontière absorbante ou bien un élément de frontière.

• Méthode des éléments de frontière

La méthode numérique des éléments de frontière convient particulièrement aux problèmes de propagation d'ondes dans les milieux semi-infinis. En effet, cette méthode est basée sur la décomposition du domaine global en sous domaines séparés par une frontière. En général, nous cherchons à obtenir une équation intégrale exacte sur la frontière modélisant le problème semi-infini : il s'agit de rechercher la fonction de Green. La méthode des éléments de frontière est donc une suite logique des travaux analytiques sur les fonctions de Green présentées précédemment. Par nature, cette méthode est limitée à des domaines relativement simples et homogènes pour lesquels il est possible de calculer cette solution élémentaire.

Elle permet de réduire le nombre de degrés de liberté du problème semi-infini ainsi que l'effort de maillage. Les travaux de Schanz [SCH01] fournissent quelques exemples de mise en place de la méthode des éléments de frontière en régime transitoire.

1.7.3 Approche expérimentale

Nous avons restreint notre recherche bibliographique aux articles historiquement les plus importants et à un exemple traitant du problème inverse en mécanique des milieux poreux continus. Une recherche bibliographique plus approfondie serait à mener pour dresser un état de l'art expérimental plus complet.

Citons donc les travaux importants de Plona [PLO80] et de Berryman et Wang [BER80] : ces auteurs sont les premiers à illustrer expérimentalement la justesse du modèle de Biot et à mettre en évidence la présence de l'onde de compression lente P_2 .

Un autre pan de la recherche bibliographique concerne le traitement expérimental du problème inverse : comment, à partir de mesures effectuées, pouvons-nous remonter à certaines caractéristiques de base du modèle ? Citons juste à ce propos un article récent de Umnova et al. [UMN05]. Dans cet article, les auteurs déduisent la tortuosité et la porosité à partir de l'étude de la réflexion et de la transmission des ondes à l'intérieur d'un matériau poreux continu biphasique en acoustique.

1.8 Conclusion et présentation générale des problèmes étudiés

1.8.1 Bilan de l'étude bibliographique

Nous avons présenté dans ce chapitre une synthèse des travaux menés sur l'étude de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux. Nous avons choisi l'approche macroscopique et nous avons explicité le modèle continu biphasique de Biot. Un bilan a ensuite été dressé sur les différentes ondes pouvant s'y propager et sur l'amortissement physique propre au milieu.

Une revue bibliographique a été menée en priorité sur l'étude des régimes transitoires. Celle-ci nous a permis de nous positionner grâce aux remarques suivantes :

- ✓ le cas des régimes transitoires est moins abondamment traité dans la littérature que celui des régimes permanents. Les difficultés numériques intrinsèques à l'étude de ces régimes, instabilités numériques, temps de calcul CPU et espace mémoire requis, en sont les principales raisons.
- ✓ le modèle de milieu poreux biphasique continu est un modèle complet et complexe dont l'étude est toujours en cours : à l'échelle spatiale macroscopique, cette modélisation génère beaucoup de travaux aussi bien théoriques que numériques. Du

point de vue de la simulation numérique, peu de résultats en régime impulsif traitent de la théorie complète de Biot en considérant l'intégralité des couplages mécaniques. Ainsi, très souvent, la tortuosité n'est pas prise en compte.

- ✓ la simulation temporelle du comportement mécanique des différentes ondes $P1$, $P2$, S et R n'a pas été présentée à notre connaissance pour des géométries bidimensionnelles et tridimensionnelles.

Nous nous proposons donc dans les chapitres suivants d'étudier la simulation numérique du comportement mécanique du sol poreux modélisé par la théorie globale de Biot en régime impulsif. Auparavant, nous précisons dans le paragraphe suivant les géométries envisagées et les caractéristiques mécaniques des sols étudiés.

1.8.2 Problèmes envisagés

Afin d'étudier notre problématique dans un cadre le plus général possible, nous nous ramenons à une étude adimensionnelle en utilisant le théorème de Vaschy Buckingham. Toutes les équations sont donc adimensionnées et, dans la suite du mémoire, sauf indication contraire, nous travaillons uniquement sur ces grandeurs adimensionnelles.

Nous avons choisi les trois grandeurs mécaniques indépendantes suivantes : le premier coefficient de Lamé μ , la masse volumique des grains solides constituant le squelette ρ_s et le coefficient d'amortissement physique du sol η . Toutes les variables sont donc adimensionnées avec ces trois grandeurs.

D'un point de vue numérique, nous avons choisi les valeurs de référence suivantes : $\mu_{ref} = 10^{10}$ Pa, $\rho_{sref} = 2600$ kg.m⁻³ et $\eta_{ref} = 0.01$ s. Nous pouvons en déduire la longueur de référence $l_{ref} = 19.5$ m et le temps de référence $t_{ref} = 0.01$ s. Ainsi, toutes les notations et tous les résultats obtenus dans la suite du mémoire doivent être multipliés par les valeurs de référence associées pour obtenir les valeurs réelles.

• Géométries étudiées

Les figures 1.7 et 1.8 présentent respectivement les géométries étudiées adimensionnées dans les cas bidimensionnels et tridimensionnels.

La sollicitation appliquée est une impulsion verticale (axe y) de très courte durée. Sa durée adimensionnée est de 0.2 (correspondant à 2 ms). Le maillage est choisi en fonction des points d'étude et de la durée d'étude. La frontière est alors modélisée par des conditions de Dirichlet imposant un déplacement nul pour chacune des deux phases.

Les résultats présentés dans le chapitre 4 pour des études en 2D et dans le chapitre 5 pour des études tridimensionnelles correspondent aux discrétisations spatiales suivantes :

- ✓ en 2D, l'espace Ω est de dimension radiale adimensionnée $r = 3.5$ (correspondant à 68.5 m). Il est maillé avec 50 626 éléments triangulaires et 25 617 noeuds à 8 degrés de liberté. Nous revenons sur ce point au chapitre 3. Le pas de maillage

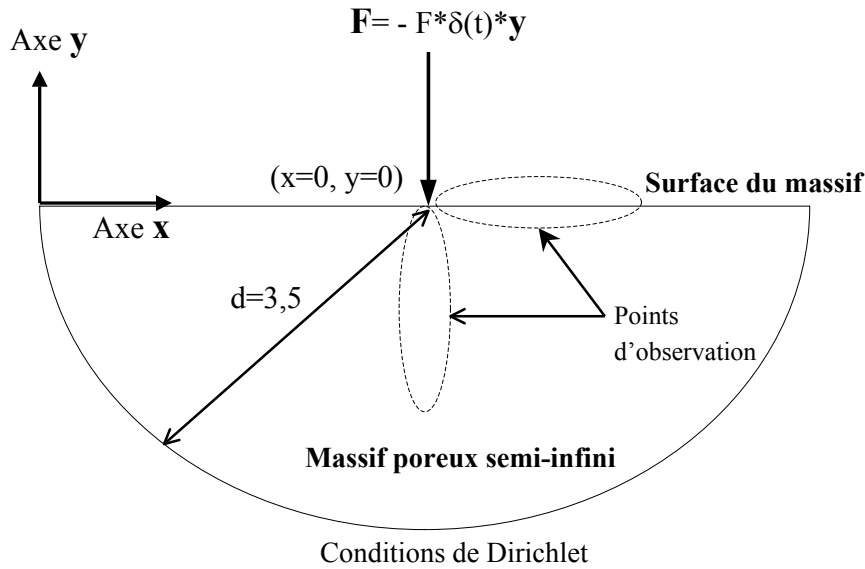


FIG. 1.7 – Géométrie bidimensionnelle adimensionnée.

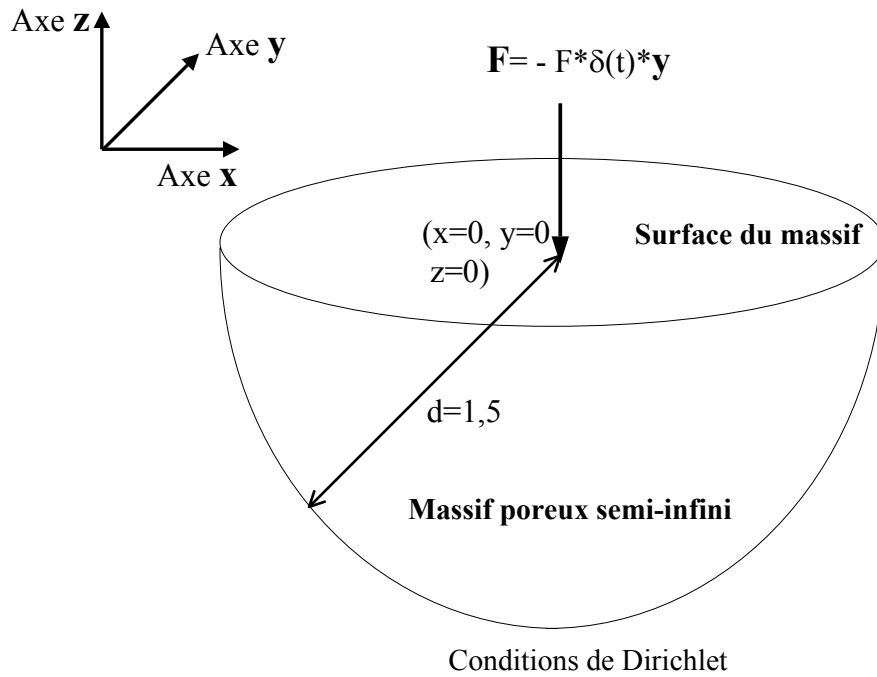


FIG. 1.8 – Géométrie tridimensionnelle adimensionnée.

spatial d'un côté du triangle est $dx = 0.03$.

- ✓ en 3D, l'espace Ω est de dimension radiale adimensionnée $r = 1.5$ (correspondant à 30 m). Il est maillé avec 1 092 562 éléments tétraédriques et 192 897 noeuds à 12 degrés de liberté. Le pas de maillage maximal d'une arête d'un tétraèdre est $dx = 0.04$ mais les dimensions moyennes des arêtes sont $dx = 0.03$.

• Caractéristiques mécaniques des sols étudiés

Nous distinguons dans la suite deux types de sol dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

- ✓ un sol que nous qualifions de dur, de type rocheux, dont les caractéristiques ont été choisies à partir d'une revue bibliographique. Les articles utilisés sont notamment

Module d'Young du milieu poreux ouvert E_0 (MPa)	Coefficient de Poisson ν	Coefficient d'incompressibilité des grains solides K_s (MPa)
20 000	0.2	40 000
Coefficient d'incompressibilité de la phase fluide K_f (MPa)	Premier coefficient de Biot M (MPa)	Second coefficient de Biot β
2 200	5 270	0.72
Densité des grains solides ρ_s (kg m ⁻³)	Densité de la phase fluide ρ_f (kg m ⁻³)	Coefficient de perméabilité hydraulique K (m ³ kg ⁻¹ s)
2600	1 000	10e-9-10e-6
Porosité ϕ	Coefficient de tortuosité a	Coefficient d'amortissement η (s)
0.4	1.2	0.0001

TAB. 1.1 – *Caractéristiques mécaniques du sol dur*

Module d'Young du milieu poreux ouvert E_0 (MPa)	Coefficient de Poisson ν	Coefficient d'incompressibilité des grains solides K_s (MPa)
1 200	0.3	40 000
Coefficient d'incompressibilité de la phase fluide K_f (MPa)	Premier coefficient de Biot M (MPa)	Second coefficient de Biot β
2 200	5 100	0.975
Densité des grains solides ρ_s (kg m ⁻³)	Densité de la phase fluide ρ_f (kg m ⁻³)	Coefficient de perméabilité hydraulique K (m ³ kg ⁻¹ s)
2600	1 000	10e-9-10e-6
Porosité ϕ	Coefficient de tortuosité a	Coefficient d'amortissement η (s)
0.4	1.2	0.001

TAB. 1.2 – *Caractéristiques mécaniques du sol mou*

ceux de Gajo et al. [GAJ94], Akbar et al. [AKB93] et Dvorkin et Nur [DVO93]. Le tableau 1.1 en donne les valeurs mécaniques.

- ✓ un sol mou, de type sablo-argileux, dont les caractéristiques issues d'une revue bibliographique, Gajo et al. [GAJ94] et [GAJ95], sont données dans le tableau 1.2.

- **Outils numériques utilisés : mailleurs et langage de programmation**

Nous avons utilisé deux mailleurs différents pour générer le maillage éléments finis des géométries précédentes. En 2D, nous avons utilisé ALGOR et en 3D GID. L'intérêt de ces deux mailleurs est de fournir un fichier épuré de notations superficielles et inutiles. Ce fichier est alors facilement accessible en pré-traitement. Nous maîtrisons ainsi les données de base lues par le code de calcul. Notons que le post-traitement a également été effectué sous ALGOR en 2D et sous GID en 3D.

Nous avons développé le code de calcul FAFEMO, pour Fast Adaptive Finite Element Modular Object, en langage C++ orienté objet. FAFEMO préexistait à l'UMR CSE pour étudier les problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques, le créateur de la structure de base du code étant André Chambarel. Nous avons créé une structure adaptée à l'étude de la propagation des ondes mécaniques en élastodynamique puis en milieux poreux dans le cadre de la théorie complète de Biot en régime impulsionnel. Nous revenons sur les développements effectués et sur les caractéristiques du code au chapitre 3.

Chapitre 2

Contribution d'une approche semi-analytique harmonique au domaine temporel

2.1 Objectifs et hypothèses

L'analyse bibliographique a montré que dans un massif poreux biphasique semi-infini, il existe deux ondes volumiques de compression, une onde volumique de cisaillement, et une onde superficielle de Rayleigh. L'objectif de ce chapitre est de revenir sur ces différentes ondes en étudiant :

- ✓ la détermination des vitesses des différentes ondes et l'étude des phénomènes de dispersion et d'atténuation associés,
- ✓ la visualisation de la contribution respective de chacune des ondes.

L'approche proposée permet de calculer de manière semi-analytique les célérités des ondes ainsi que les déplacements de chaque phase, solide ou fluide, en tout point du massif dans le domaine des nombres d'onde et dans le domaine spatial. Pour cela, nous allons nous placer dans le cadre d'une étude en régime harmonique. La géométrie étudiée est tridimensionnelle : il s'agit d'un massif semi-infini analogue à celui de la figure 1.8 soumis ici à une charge verticale de forme rectangulaire appliquée en surface.

Nous reprenons les équations de Biot présentées dans le chapitre 1, dans lesquelles nous introduisons deux décompositions de Helmholtz : cette technique présente l'avantage de séparer les ondes de compression des ondes de cisaillement. L'étude en régime harmonique permet dans un deuxième temps de nous affranchir des dérivées temporelles. Dans un troisième temps, nous introduisons une transformée de Fourier sur les variables d'espace de surface du massif : un système différentiel sur la variable de profondeur est alors obtenu dans le domaine dit transformé ou encore domaine des nombres d'onde. Ce

système se résout de manière analytique. Cette approche est inspirée des travaux effectués par Jones et al. [JON93] en élastodynamique et par Degrande et al. en milieux poreux [DEG98].

L'analyse des déplacements dans le domaine des nombres d'onde permet de visualiser l'influence de chacune des ondes de manière découlée. Le retour dans le domaine spatial est effectué numériquement par un algorithme de transformée de Fourier rapide inverse (FFT). Les déplacements réels sont issus de la superposition des contributions de chaque onde, et dans le domaine spatial, ces contributions sont totalement mélangées : il est alors impossible de discerner l'influence de chacune d'elles.

Ainsi, dans ce chapitre, nous avons choisi de présenter une analyse des déplacements dans le domaine des nombres d'onde. Si des résultats dans le domaine transformé existent déjà dans le cadre d'études de massifs viscoélastiques, Jones et Petyt [JON91] [JON93], Jones et al. [JON98], Lefeuvre-Mesgouez et al. [LM00], à notre connaissance, aucune analyse de ce type n'a été proposée dans le cadre plus général de massifs poreux biphasiques.

Cette approche est complémentaire de l'étude en régime transitoire qui est le corps de ce mémoire. Elle permet notamment d'appréhender les phénomènes de dispersion et d'atténuation qu'il nous faut maîtriser lors de l'étude dans le domaine temporel. Ainsi, par exemple, la détermination précise des vitesses de propagation est indispensable à l'interprétation des résultats transitoires qui seront présentés dans les chapitres 4 et 5.

2.2 Equations d'ondes du problème

Dans un souci de clarté et de compréhension, nous adoptons dans tout ce chapitre l'écriture vectorielle sous la forme $\vec{u}$ au lieu de l'écriture en caractère gras.

Nous reprenons les équations présentées lors de la synthèse bibliographique, chapitre 1 section 4. Cette formulation fait apparaître les déplacements solides et fluides respectivement $\vec{u}$ et $\vec{U}$. A partir de ces équations, plusieurs approches peuvent être envisagées :

- ✓ l'introduction des dilatations, $\theta = \text{div} \vec{u}$ et $\Theta = \text{div} \vec{U}$, donne une équation matricielle permettant de mettre en évidence les ondes de compression P_1 et P_2 : cette approche a été présentée par Jones et Petyt dans le cadre plus restreint d'un massif viscoélastique à une seule phase, [JON91] [JON93] [JON98].
- ✓ la décomposition de Helmholtz des déplacements des phases solide et fluide permet d'obtenir des systèmes matriciels relatifs respectivement aux ondes de compression P_1 et P_2 et à l'onde de cisaillement S : cette technique est utilisée par exemple par Bourbié et al. [BOU86], ou encore Al-Khoury et al. [AK02].
- ✓ la décomposition de Helmholtz du déplacement solide et du déplacement relatif, $\vec{u}$ et $\vec{w} = \phi(\vec{U} - \vec{u})$, est une variante de la méthode précédente qui présente

l'avantage de conduire à des matrices symétriques plus simples : cette technique est utilisée entre autres par Degrande et al. [DEG98] ou Yang [YAN00] [YAN01].

Pour les raisons qui précèdent, nous retenons ici la formulation en déplacements solides - déplacements relatifs $\{\vec{u}, \vec{w}\}$. Après remaniement des équations (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4), le système s'écrit sous la forme suivante :

- équations du mouvement :

$$\sigma_{ij,j} = [(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f]\ddot{u}_i + \rho_f\ddot{w}_i \quad (2.1)$$

$$p_{,i} = -\frac{1}{K}\dot{w}_i - \rho_f\ddot{u}_i - \frac{a\rho_f}{\phi}\ddot{w}_i \quad (2.2)$$

- lois de comportement :

$$\sigma_{ij} = [\lambda_0 + M\beta^2]u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \beta Mw_{k,k}\delta_{ij} \quad (2.3)$$

$$p = -M\beta u_{k,k} - Mw_{k,k} \quad (2.4)$$

En supposant que les paramètres du problème soient indépendants des variables d'espace sur le domaine étudié, en dérivant par rapport aux variables d'espace les lois de comportement (2.3) et (2.4) puis en injectant dans les équations du mouvement (2.1) et (2.2), il vient sous forme vectorielle :

$$\begin{cases} (\lambda_0 + \mu + M\beta^2)\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) + \mu\overrightarrow{\Delta} \vec{u} + M\beta\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{w}) = [(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f]\ddot{\vec{u}} + \rho_f\ddot{\vec{w}} \\ M\beta\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) + M\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{w}) = \frac{1}{K}\dot{\vec{w}} + \rho_f\ddot{\vec{u}} + \frac{a\rho_f}{\phi}\ddot{\vec{w}} \end{cases} \quad (2.5)$$

Introduisons alors la décomposition de Helmholtz sur le déplacement solide $\vec{u}$ et le déplacement relatif $\vec{w}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\psi} \quad (2.6)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi^r + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\psi}^r \quad (2.7)$$

où φ et φ^r sont des potentiels scalaires et $\vec{\psi}$ et $\vec{\psi}^r$ des potentiels vectoriels.

Il vient, à partir du système vectoriel (2.5), les équations vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} & (\lambda_0 + 2\mu + M\beta^2)\overrightarrow{\text{grad}}(\Delta\varphi) + M\beta\overrightarrow{\text{grad}}(\Delta\varphi^r) + \mu\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\Delta} \vec{\psi} = \\ & [(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f]\overrightarrow{\text{grad}}\ddot{\varphi} + \rho_f\overrightarrow{\text{grad}}\ddot{\varphi}^r + [(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f]\overrightarrow{\text{rot}}\ddot{\vec{\psi}} + \rho_f\overrightarrow{\text{rot}}\ddot{\vec{\psi}}^r \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 M\beta \overrightarrow{\text{grad}}(\Delta\varphi) + M\overrightarrow{\text{grad}}(\Delta\varphi^r) &= \frac{1}{K}\overrightarrow{\text{grad}}\dot{\varphi}^r + \rho_f\overrightarrow{\text{grad}}\ddot{\varphi} + \frac{a\rho_f}{\phi}\overrightarrow{\text{grad}}\ddot{\varphi}^r \\
 &+ \frac{1}{K}\overrightarrow{\text{rot}}\dot{\psi}^r + \rho_f\overrightarrow{\text{rot}}\ddot{\psi} + \frac{a\rho_f}{\phi}\overrightarrow{\text{rot}}\ddot{\psi}^r
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sous condition de jauges, l'unicité de la décomposition de Helmholtz mène alors au système :

$$\begin{cases}
 -(\lambda_0 + 2\mu + M\beta^2)\Delta\varphi - M\beta\Delta\varphi^r + [(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f]\ddot{\varphi} + \rho_f\ddot{\varphi}^r = 0 \\
 -M\beta\Delta\varphi - M\Delta\varphi^r + \frac{1}{K}\dot{\varphi}^r + \rho_f\ddot{\varphi} + \frac{a\rho_f}{\phi}\ddot{\varphi}^r = 0 \\
 -\mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{\psi} + [(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f]\overrightarrow{\ddot{\psi}} + \rho_f\overrightarrow{\ddot{\psi}}^r = \overrightarrow{0} \\
 \rho_f\overrightarrow{\ddot{\psi}} + \frac{a\rho_f}{\phi}\overrightarrow{\ddot{\psi}}^r + \frac{1}{K}\dot{\psi}^r = \overrightarrow{0}
 \end{cases} \quad (2.10)$$

En utilisant les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 [K_P] &= \begin{bmatrix} \lambda_0 + 2\mu + M\beta^2 & M\beta \\ M\beta & M \end{bmatrix} \\
 [K_S] &= \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [M] &= \begin{bmatrix} (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f & \rho_f \\ \rho_f & \frac{a\rho_f}{\phi} \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

il vient sous forme matricielle deux systèmes découplés relatifs respectivement aux ondes de compression $P1$ et $P2$, système en potentiels scalaires φ et φ^r (2.11), et à l'onde de cisaillement S , système vectoriel en potentiels vectoriels $\overrightarrow{\psi}$ et $\overrightarrow{\psi}^r$ (2.12) :

$$-[K_P] \begin{Bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\varphi^r \end{Bmatrix} + [M] \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi}^r \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$-[K_S] \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Delta\psi} \\ \overrightarrow{\Delta\psi}^r \end{Bmatrix} + [M] \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\ddot{\psi}} \\ \overrightarrow{\ddot{\psi}}^r \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\dot{\psi}} \\ \overrightarrow{\dot{\psi}}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

2.3 Conditions aux limites

Dans le cadre du problème étudié, le massif est soumis à une charge harmonique verticale de forme rectangulaire appliquée en surface ($z = 0$), ce qui entraîne les relations :

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = f(x, y)e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

$$\sigma_{xz}|_{z=0} = \sigma_{yz}|_{z=0} = p_{z=0} = 0 \quad (2.14)$$

où $f(x, y)$ est une fonction des variables d'espace de surface x et y . Dans le cas d'une charge uniformément répartie sur un rectangle de dimensions $2l_1, 2l_2$, f est donnée par :

$$f(x, y) = -f_0 \text{ pour } |x| < l_1, |y| < l_2 \quad (2.15)$$

Nous exprimons alors les contraintes et pression en fonction des potentiels de Helmholtz introduits précédemment. Les relations suivantes sont obtenues et sont prises par la suite en $z = 0$:

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_y + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.16)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_x - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.17)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda_0 + M\beta^2) \Delta \varphi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} \right) + M\beta \Delta \varphi^r \quad (2.18)$$

$$p = -M\Delta \varphi^r - M\beta \Delta \varphi \quad (2.19)$$

2.4 Résolution du système

2.4.1 Régime harmonique et transformée de Fourier spatiale

En considérant un régime harmonique, de pulsation ω , il est classique de poser :

$$\varphi = \varphi^* e^{i\omega t}, \quad \varphi^r = \varphi^{r*} e^{i\omega t}, \quad \vec{\psi} = \vec{\psi}^* e^{i\omega t} \text{ et } \vec{\psi}^r = \vec{\psi}^{r*} e^{i\omega t}$$

Dans le cadre du problème tridimensionnel étudié, nous introduisons en outre une transformée de Fourier sur les variables d'espace x et y définie par :

$$\bar{h}(\gamma, \zeta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y, z) e^{-i(\gamma x + \zeta y)} dx dy \quad (2.20)$$

Il découle alors de (2.11) et (2.12) les systèmes différentiels matriciels suivants relatifs respectivement aux ondes de compression et à l'onde de cisaillement :

$$\left(- \left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 - \zeta^2 \right) [K_P] - \omega^2 [M] + i\omega [C] \right) \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}^* \\ \bar{\varphi}^{r*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\left(- \left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 - \zeta^2 \right) [K_S] - \omega^2 [M] + i\omega [C] \right) \begin{Bmatrix} \vec{\bar{\psi}}^* \\ \vec{\bar{\psi}}^{r*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

2.4.2 Résolution du système relatif aux ondes de compression

L'intégration du système (2.21) donne une solution sous la forme d'ondes progressives :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varphi}^* \\ \bar{\varphi}^{r*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1^* \\ \bar{\varphi}_1^{r*} \end{Bmatrix} e^{ik_{P1}z} + \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_2^* \\ \bar{\varphi}_2^{r*} \end{Bmatrix} e^{ik_{P2}z} \quad (2.23)$$

Les fonctions k_{P1} et k_{P2} dépendent de ω , γ et ζ et sont relatives aux ondes $P1$ et $P2$. Elles sont calculées par le déterminant suivant :

$$|-(k_{Pj}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)[K_P] + \omega^2[M] - i\omega[C]| = 0 \quad (2.24)$$

Avec la géométrie étudiée, la propagation a lieu dans le sens des z décroissants. Par conséquent, les fonctions k_{P1} et k_{P2} sont choisies telles que $\Re\{k_{P1}\} > 0$, $\Re\{k_{P2}\} > 0$. La décroissance pour $z \rightarrow -\infty$ conduit à $\Im\{k_{P1}\} < 0$, $\Im\{k_{P2}\} < 0$.

Par ailleurs, il existe des relations entre, d'une part $\bar{\varphi}_1^*$ et $\bar{\varphi}_1^{r*}$, et d'autre part $\bar{\varphi}_2^*$ et $\bar{\varphi}_2^{r*}$, issues du système matriciel précédent (lié puisque son déterminant est nul) :

$$\bar{\varphi}_j^{r*} = -\frac{-(k_{Pj}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)\beta M + \omega^2 \rho_f}{-(k_{Pj}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)M + \omega^2 \rho_f a / \phi - i\omega / K} \bar{\varphi}_j^* = F_j(\gamma, \zeta, \omega) \bar{\varphi}_j^* \quad (2.25)$$

avec $j = 1, 2$. L'indice 1 étant relatif à l'onde $P1$ et l'indice 2 à l'onde $P2$.

D'où finalement :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varphi}^* \\ \bar{\varphi}^{r*} \end{Bmatrix} = \bar{\varphi}_1^* e^{ik_{P1}z} \begin{Bmatrix} 1 \\ F_1(\gamma, \zeta, \omega) \end{Bmatrix} + \bar{\varphi}_2^* e^{ik_{P2}z} \begin{Bmatrix} 1 \\ F_2(\gamma, \zeta, \omega) \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Les constantes $\bar{\varphi}_1^*$ et $\bar{\varphi}_2^*$ sont déterminées à partir des conditions aux limites. Deux ondes de compression $P1$ et $P2$ sont ainsi mises en évidence.

2.4.3 Résolution du système relatif à l'onde de cisaillement

Le système (2.22) présente une matrice $[K_S]$ avec une ligne nulle. Ainsi, les deux potentiels vectoriels sont directement proportionnels et sont liés par la relation suivante, issue de la deuxième équation du système matriciel (2.22) :

$$\vec{\psi}^{r*} = \frac{-\rho_f \omega^2 \phi K}{a \rho_f \omega^2 K - i\omega \phi} \vec{\psi}^* = G(\omega) \vec{\psi}^* \quad (2.27)$$

En remplaçant ensuite dans la première équation du système, on obtient l'équation différentielle en $\vec{\psi}^*$ suivante :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_S^2 \right) \vec{\psi}^* = 0 \quad (2.28)$$

avec :

$$k_S^2 = -\gamma^2 - \zeta^2 + \frac{\omega^2}{\mu} ([(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f] + \rho_f G(\omega)) \quad (2.29)$$

La solution est alors donnée par :

$$\vec{\psi}^* = \vec{\psi}_S^* e^{ik_S z} = \begin{Bmatrix} \overline{\psi}_{Sx}^* \\ \overline{\psi}_{Sy}^* \\ \overline{\psi}_{Sz}^* \end{Bmatrix} e^{ik_S z} \quad (2.30)$$

Les signes des parties réelle et imaginaire sont choisis conformément à ce qui a été précisé précédemment.

Soit, en définitive :

$$\begin{Bmatrix} \vec{\psi}^* \\ \vec{\psi}^{r*} \end{Bmatrix} = \vec{\psi}_S^* e^{ik_S z} \begin{Bmatrix} 1 \\ G(\omega) \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Ainsi, il existe une seule onde de cisaillement. Les constantes $\overline{\psi}_{Sx}^*$, $\overline{\psi}_{Sy}^*$ et $\overline{\psi}_{Sz}^*$ sont également des constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites.

2.4.4 Déplacements dans le domaine des nombres d'onde

Avec la décomposition de Helmholtz introduite sur $\vec{u}$, équation (2.6), et écrite dans le domaine des nombres d'ondes, il vient les expressions des déplacements solides transformés suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \overline{u}_x^* \\ \overline{u}_y^* \\ \overline{u}_z^* \end{Bmatrix} = \overline{\varphi}_1^* e^{ik_{P1} z} \begin{Bmatrix} i\gamma \\ i\zeta \\ ik_{P1} \end{Bmatrix} + \overline{\varphi}_2^* e^{ik_{P2} z} \begin{Bmatrix} i\gamma \\ i\zeta \\ ik_{P2} \end{Bmatrix} + e^{ik_S z} \begin{Bmatrix} i\zeta \overline{\psi}_{Sz}^* - ik_S \overline{\psi}_{Sy}^* \\ ik_S \overline{\psi}_{Sx}^* - i\gamma \overline{\psi}_{Sz}^* \\ i\gamma \overline{\psi}_{Sy}^* - i\zeta \overline{\psi}_{Sx}^* \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

qui peut se résumer par :

$$\begin{Bmatrix} \overline{u}_x^* \\ \overline{u}_y^* \\ \overline{u}_z^* \end{Bmatrix} = \overline{\varphi}_1^* e^{ik_{P1} z} \begin{Bmatrix} i\gamma \\ i\zeta \\ ik_{P1} \end{Bmatrix} + \overline{\varphi}_2^* e^{ik_{P2} z} \begin{Bmatrix} i\gamma \\ i\zeta \\ ik_{P2} \end{Bmatrix} + e^{ik_S z} \begin{Bmatrix} \overline{B} \\ \overline{C} \\ \overline{D} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

avec la relation : $\overline{D} = \frac{-1}{k_S} (\gamma \overline{B} + \zeta \overline{C})$ issue de la forme en rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{\psi}^*$, terme relatif à l'onde de cisaillement.

En se ramenant à une écriture matricielle, il vient :

$$\begin{Bmatrix} \overline{u}_x^* \\ \overline{u}_y^* \\ \overline{u}_z^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i\gamma e^{ik_{P1} z} & i\gamma e^{ik_{P2} z} & e^{ik_S z} & 0 \\ i\zeta e^{ik_{P1} z} & i\zeta e^{ik_{P2} z} & 0 & e^{ik_S z} \\ ik_{P1} e^{ik_{P1} z} & ik_{P2} e^{ik_{P2} z} & -\frac{\gamma}{k_S} e^{ik_S z} & -\frac{\zeta}{k_S} e^{ik_S z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\varphi}_1^* \\ \overline{\varphi}_2^* \\ \overline{B} \\ \overline{C} \end{Bmatrix} = [Q_u] \begin{Bmatrix} \overline{\varphi}_1^* \\ \overline{\varphi}_2^* \\ \overline{B} \\ \overline{C} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

où $\bar{\varphi}_1^*$, $\bar{\varphi}_2^*$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ sont fonctions de β et γ , définis à partir des conditions aux limites que nous allons expliciter dans le paragraphe suivant.

Le déplacement relatif transformé issu de la relation de Helmholtz (2.7) écrite dans le domaine transformé est donné de manière similaire par :

$$\begin{pmatrix} \bar{w}_x^* \\ \bar{w}_y^* \\ \bar{w}_z^* \end{pmatrix} = \bar{\varphi}_1^{r*} e^{ik_{P1}z} \begin{pmatrix} i\gamma \\ i\zeta \\ ik_{P1} \end{pmatrix} + \bar{\varphi}_2^{r*} e^{ik_{P2}z} \begin{pmatrix} i\gamma \\ i\zeta \\ ik_{P2} \end{pmatrix} + e^{iks z} \begin{pmatrix} i\zeta \bar{\psi}_{Sz}^{r*} - ik_S \bar{\psi}_{Sy}^{r*} \\ ik_S \bar{\psi}_{Sx}^{r*} - i\gamma \bar{\psi}_{Sz}^{r*} \\ i\gamma \bar{\psi}_{Sy}^{r*} - i\zeta \bar{\psi}_{Sx}^{r*} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

En utilisant les relations (2.25) et (2.27), il vient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{w}_x^* \\ \bar{w}_y^* \\ \bar{w}_z^* \end{pmatrix} &= [Q_u] \begin{bmatrix} F_1(\gamma, \zeta, \omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2(\gamma, \zeta, \omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G(\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1^* \\ \bar{\varphi}_2^* \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i\gamma F_1(\gamma, \zeta, \omega) e^{ik_{P1}z} & i\gamma F_2(\gamma, \zeta, \omega) e^{ik_{P2}z} & G(\omega) e^{iks z} & 0 \\ i\zeta F_1(\gamma, \zeta, \omega) e^{ik_{P1}z} & i\zeta F_2(\gamma, \zeta, \omega) e^{ik_{P2}z} & 0 & G(\omega) e^{iks z} \\ ik_{P1} F_1(\gamma, \zeta, \omega) e^{ik_{P1}z} & ik_{P2} F_2(\gamma, \zeta, \omega) e^{ik_{P2}z} & -\frac{\gamma}{k_S} G(\omega) e^{iks z} & -\frac{\zeta}{k_S} G(\omega) e^{iks z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1^* \\ \bar{\varphi}_2^* \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{pmatrix} \\ &= [Q_w] \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1^* \\ \bar{\varphi}_2^* \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.4.5 Conditions aux limites dans le domaine des nombres d'onde

Les conditions aux limites font intervenir les contraintes et pression en $z = 0$. Dans un premier temps, nous exprimons les relations sur les contraintes (2.16) à (2.19) dans le domaine transformé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz}^* &= \mu \left\langle -2\gamma k_{P1} e^{ik_{P1}z}, -2\gamma k_{P2} e^{ik_{P2}z}, \frac{-k_S^2 + \gamma^2}{ik_S} e^{iks z}, \frac{\zeta \gamma}{ik_S} e^{iks z} \right\rangle \\ &< \bar{\varphi}_1^*, \bar{\varphi}_2^*, \bar{B}, \bar{C} >^t \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yz}^* &= \mu \left\langle -2\zeta k_{P1} e^{ik_{P1}z}, -2\zeta k_{P2} e^{ik_{P2}z}, \frac{\zeta \gamma}{ik_S} e^{iks z}, \frac{-k_S^2 + \zeta^2}{ik_S} e^{iks z} \right\rangle \\ &< \bar{\varphi}_1^*, \bar{\varphi}_2^*, \bar{B}, \bar{C} >^t \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zz}^* &= < -((k_{P1}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)(\lambda_0 + M\beta^2 + M\beta F_1(\gamma, \zeta, \omega)) + 2\mu k_{P1}^2) e^{ik_{P1}z}, \\ &\quad -((k_{P2}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)(\lambda_0 + M\beta^2 + M\beta F_2(\gamma, \zeta, \omega)) + 2\mu k_{P2}^2) e^{ik_{P2}z}, \\ &\quad -2i\mu\gamma e^{iks z}, -2i\mu\zeta e^{iks z} > \\ &< \bar{\varphi}_1^*, \bar{\varphi}_2^*, \bar{B}, \bar{C} >^t \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}^* = & \langle M(k_{P1}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)(F_1(\gamma, \zeta, \omega) + \beta)e^{ik_{P1}z}, \\ & M(k_{P2}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)(F_2(\gamma, \zeta, \omega) + \beta)e^{ik_{P2}z}, 0, 0 \rangle \\ & \langle \bar{\varphi}_1^*, \bar{\varphi}_2^*, \bar{B}, \bar{C} \rangle^t \end{aligned} \quad (2.40)$$

A partir de ces relations (2.37) à (2.40), prises en $z = 0$, nous déduisons sous forme matricielle :

$$[S] \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1^* \\ \bar{\varphi}_2^* \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xz}|_{z=0}^* \\ \bar{\sigma}_{yz}|_{z=0}^* \\ \bar{\sigma}_{zz}|_{z=0}^* \\ \bar{p}_{z=0}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{f}(\gamma, \zeta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

avec :

$$[S] = \begin{bmatrix} -2\mu\gamma k_{P1} & -2\mu\gamma k_{P2} & \frac{\mu(-k_S^2 + \gamma^2)}{ik_S} & \frac{\mu\zeta\gamma}{ik_S} \\ -2\mu\zeta k_{P1} & -2\mu\zeta k_{P2} & \frac{\mu\zeta\gamma}{ik_S} & \frac{\mu(-k_S^2 + \gamma^2)}{ik_S} \\ s_{31} & s_{32} & -2i\mu\gamma & -2i\mu\zeta \\ s_{41} & s_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} s_{31} &= -(k_{P1}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)(\lambda_0 + M\beta^2 + M\beta F_1(\gamma, \zeta, \omega)) - 2\mu k_{P1}^2 \\ s_{32} &= -(k_{P2}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)(\lambda_0 + M\beta^2 + M\beta F_2(\gamma, \zeta, \omega)) - 2\mu k_{P2}^2 \\ s_{41} &= M(k_{P1}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)(F_1(\gamma, \zeta, \omega) + \beta) \\ s_{42} &= M(k_{P2}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)(F_2(\gamma, \zeta, \omega) + \beta) \end{aligned}$$

Le système (2.41) est un système de 4 équations à 4 inconnues à résoudre.

2.4.6 Bilan sur les déplacements dans le domaine des nombres d'onde

On détermine alors totalement les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{w}$ et $\vec{U}$ grâce aux relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_x^* \\ \bar{u}_y^* \\ \bar{u}_z^* \end{Bmatrix} = [Q_u] \times [S]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xz|z=0}^* \\ \bar{\sigma}_{yz|z=0}^* \\ \bar{\sigma}_{zz|z=0}^* \\ \bar{p}_{z=0}^* \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_x^* \\ \bar{w}_y^* \\ \bar{w}_z^* \end{Bmatrix} = [Q_w] \times [S]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xz|z=0}^* \\ \bar{\sigma}_{yz|z=0}^* \\ \bar{\sigma}_{zz|z=0}^* \\ \bar{p}_{z=0}^* \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_x^* \\ \bar{U}_y^* \\ \bar{U}_z^* \end{Bmatrix} = \left(\frac{1}{\phi} [Q_w] + [Q_u] \right) \times [S]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xz|z=0}^* \\ \bar{\sigma}_{yz|z=0}^* \\ \bar{\sigma}_{zz|z=0}^* \\ \bar{p}_{z=0}^* \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

avec $[Q_u]$ et $[Q_w]$ définis par les relations (2.34) et (2.36), $[S]$ par (2.42).

Nous obtenons alors les déplacements dans le domaine des nombres d'onde.

Le retour dans le domaine spatial se fait par transformée de Fourier inverse de manière numérique par un algorithme de FFT.

2.4.7 Cas bidimensionnel

Dans le cadre d'une approche bidimensionnelle, nous traitons le cas d'une charge uniformément répartie sur une bande infinie le long de l'axe y et de largeur donnée sur l'axe x . La transformée de Fourier utilisée n'est plus double mais simple puisqu'elle s'effectue sur la seule variable d'espace de surface x . Dans ce cas, la variable de profondeur est toujours notée z .

Les potentiels vecteur se réduisent à une seule composante : $\vec{\psi} = \psi_y \vec{e}_y = \psi \vec{e}_y$ où $\vec{e}_y$ est le vecteur unitaire de l'axe y .

En résumé, nous obtenons, dans le domaine transformé, les résultats suivants :

$$\{\bar{u}^*\} = [Q'_u][S']^{-1} < \bar{\sigma}_{|z=0}^* >^t \quad (2.46)$$

$$\{\bar{w}^*\} = [Q'_w][S']^{-1} < \bar{\sigma}_{|z=0}^* >^t \quad (2.47)$$

$$\{\bar{U}^*\} = \left(\frac{[Q'_w]}{\phi} + [Q'_u] \right) [S']^{-1} < \bar{\sigma}_{|z=0}^* >^t \quad (2.48)$$

avec :

$$\{\bar{u}^*\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_x^* \\ \bar{u}_z^* \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{w}^*\} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_x^* \\ \bar{w}_z^* \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{U}^*\} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_x^* \\ \bar{U}_z^* \end{Bmatrix}$$

et :

$$\langle \bar{\sigma}_{|z=0}^* \rangle^t = \langle \bar{\sigma}_{xz|z=0}^* = 0, \bar{\sigma}_{zz|z=0}^* = \bar{f}(\gamma), \bar{p}_{z=0}^* = 0 \rangle \quad (2.49)$$

$$[Q'_u] = \begin{bmatrix} i\gamma e^{ik_{P1}z} & i\gamma e^{ik_{P2}z} & e^{ik_S z} \\ ik_{P1} e^{ik_{P1}z} & ik_{P2} e^{ik_{P2}z} & -\frac{\gamma}{k_S} e^{ik_S z} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$[Q'_w] = \begin{bmatrix} i\gamma F_1(\gamma, \omega) e^{ik_{P1}z} & i\gamma F_2(\gamma, \omega) e^{ik_{P2}z} & G(\omega) e^{ik_S z} \\ ik_{P1} F_1(\gamma, \omega) e^{ik_{P1}z} & ik_{P2} F_2(\gamma, \omega) e^{ik_{P2}z} & -\frac{\gamma}{k_S} G(\omega) e^{ik_S z} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$[S'] = \begin{bmatrix} -2\gamma k_{P1} & -2\gamma k_{P2} & \frac{-k_{P2}^2 + \gamma^2}{ik_S} \\ s_{21} & s_{22} & -i\gamma \\ s_{31} & s_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} s_{21} &= -(k_{P1}^2 + \gamma^2)(\lambda_0 + M\beta^2 + M\beta F_1(\gamma, \omega)) - 2\mu k_{P1}^2 \\ s_{22} &= -(k_{P2}^2 + \gamma^2)(\lambda_0 + M\beta^2 + M\beta F_2(\gamma, \omega)) - 2\mu k_{P2}^2 \\ s_{31} &= M(k_{P1}^2 + \gamma^2)(F_1(\gamma, \omega) + \beta) \\ s_{32} &= M(k_{P2}^2 + \gamma^2)(F_2(\gamma, \omega) + \beta) \end{aligned}$$

Les fonctions F_j sont données par :

$$F_j(\gamma, \omega) = \frac{(\gamma^2 + k_{Pj}^2)\beta M - \omega^2 \rho_f}{(\gamma^2 + k_{Pj}^2)M - \omega^2 \rho_f a / \phi + i\omega / K} \quad (2.53)$$

L'expression donnant $G(\omega)$ est inchangée, équation (2.27).

2.5 Résultats

Les valeurs numériques des caractéristiques mécaniques du sol sont celles du tableau 1.1, chapitre 1 section 8.

2.5.1 Vitesses de propagation des ondes, phénomènes de dispersion et d'atténuation

Les vitesses de propagation des ondes, c_{P1} , c_{P2} et c_S , sont déduites des fonctions k_i ($i = P1, P2, S$) introduites précédemment par :

$$k_i^2 = -\gamma^2 - \zeta^2 + \frac{\omega^2}{c_i^2(\omega)} \text{ avec } i = P1, P2, S. \quad (2.54)$$

Il vient donc :

$$c_i^2(\omega) = \frac{\omega^2}{k_i^2 + \gamma^2 + \zeta^2} \quad (2.55)$$

Les figures 2.1 et 2.2 présentent les courbes de dispersion pour deux valeurs de perméabilité faible et élevée. Deux conclusions majeures sont à tirer :

- ✓ dans chaque cas, l'onde P_2 est plus dispersive que les deux autres ondes volumiques P_1 et S qui sont toutes deux peu dispersives.
- ✓ lorsque la perméabilité est plus faible, le caractère dispersif et l'atténuation de P_2 s'accroissent nettement.

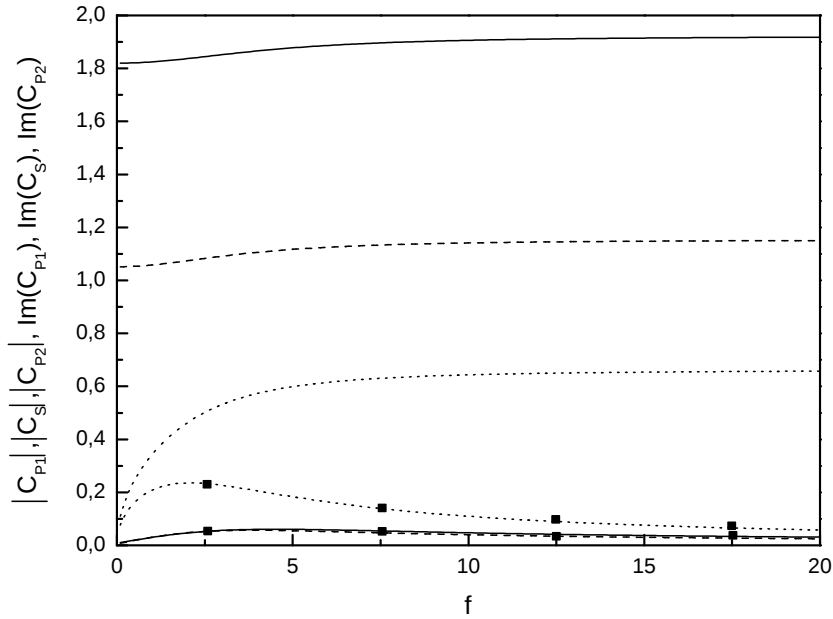


FIG. 2.1 – Courbes de dispersion et d'atténuation pour une perméabilité élevée $K = 0.26$: valeurs des vitesses (pas de symbole) et partie imaginaire relative à l'atténuation (symboles carrés) pour les ondes P_1 (trait plein), S (tirets) et P_2 (pointillés).

Si on ne prend pas en compte l'amortissement, c'est à dire les termes issus des dérivées premières, on obtient les relations obtenues par Coussy [COU91], pour lesquelles ni l'atténuation ni la dispersion ne sont prises en compte. Les valeurs qui en découlent correspondent alors aux valeurs limites des courbes de dispersion. Ces valeurs limites de vitesses de propagation adimensionnelles sont, pour le sol dur, respectivement :

$$c_{P1} = 1.90 \text{ , } c_{P2} = 0.65 \text{ et } c_S = 1.15$$

Dans le cadre de régimes harmoniques, on introduit généralement la notion de fréquence caractéristique du sol par :

$$f_c = \frac{\phi}{2\pi\rho_f K} \quad (2.56)$$

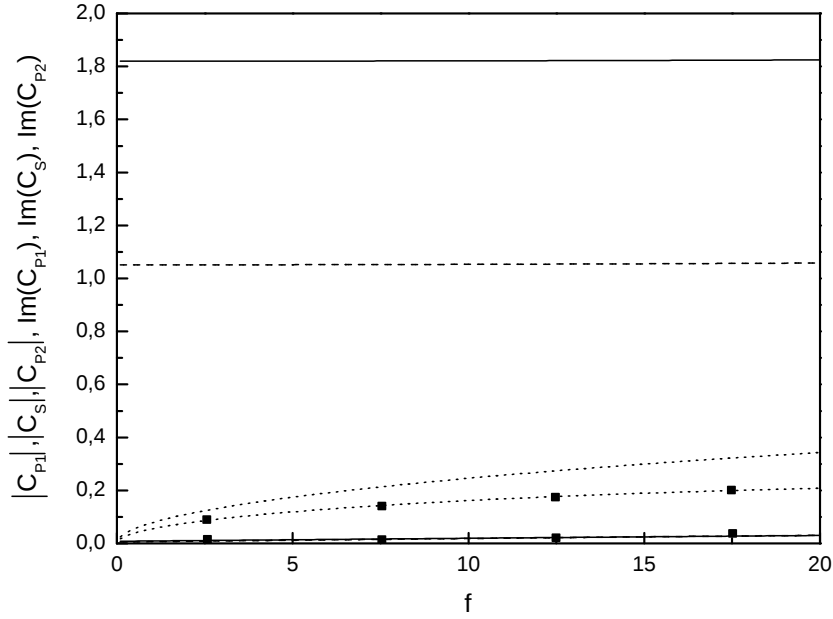


FIG. 2.2 – Courbes de dispersion et d'atténuation pour une perméabilité faible $K = 0.013$: valeurs des vitesses (pas de symbole) et partie imaginaire relative à l'atténuation (symboles carrés) pour les ondes P1 (trait plein), S (tirets) et P2 (pointillés).

Le rapport f/f_c est proportionnel à la perméabilité, f étant la fréquence excitatrice. La pulsation adimensionnelle de la charge est ici prise égale à 4.

On retrouve alors la conclusion suivante :

- ✓ pour un rapport f/f_c faible, seule une onde de compression P1 se propage puisque l'onde P2 est fortement atténuée et dispersive, cf. figure 2.2 : le milieu présente alors un comportement de type monphasique. Le rapport f/f_c vaut ici :

$$\frac{f}{f_c} = \frac{\omega \rho_f K}{\phi} = 0.05$$

- ✓ à l'opposé pour un rapport f/f_c plus fort, le comportement fait bien apparaître deux ondes de compression et présente un caractère biphasique, cf. figure 2.1. Le rapport f/f_c vaut ici :

$$\frac{f}{f_c} = \frac{\omega \rho_f K}{\phi} = 1.0$$

Ces remarques se retrouveront lors de l'étude en régime transitoire pour lequel nous reviendrons sur l'influence de la perméabilité sur la réponse du milieu, cf. chapitre 4 section 2.

2.5.2 Résultats et analyse dans le domaine des nombres d'onde

Les résultats présentés dans cette partie sont issus d'un problème bidimensionnel. Ils rejoignent les conclusions que l'on peut obtenir à partir du cas tridimensionnel de la charge rectangulaire. Ils ont été validés par comparaison avec les résultats obtenus en élastodynamique par Jones et Petyt [JON91] [JON93].

Les résultats obtenus pour un sol biphasique saturé sont présentés sur la figure 2.3. L'analyse de la partie réelle des déplacements dans le domaine transformé permet de dissocier les différentes ondes : les contributions des ondes volumiques de compression et de cisaillement sont négatives alors que la contribution de l'onde de surface est positive. Les déplacements présentent un maximum en chaque nombre d'onde $\gamma = \pm k_{P1} = 2.1$, $\gamma = \pm k_S = 3.4$, $\gamma = \pm k_R$, $\gamma = \pm k_{P2} = 6.1$. L'onde de cisaillement est l'onde volumique prédominante pour la phase solide alors que la phase fluide ne présente des contributions perceptibles que pour les ondes de Rayleigh et de compression. L'onde de surface est par ailleurs plus importante pour la phase solide. L'onde $P2$ n'est pas visualisée sur cette phase à cause de la prédominance de l'onde R .

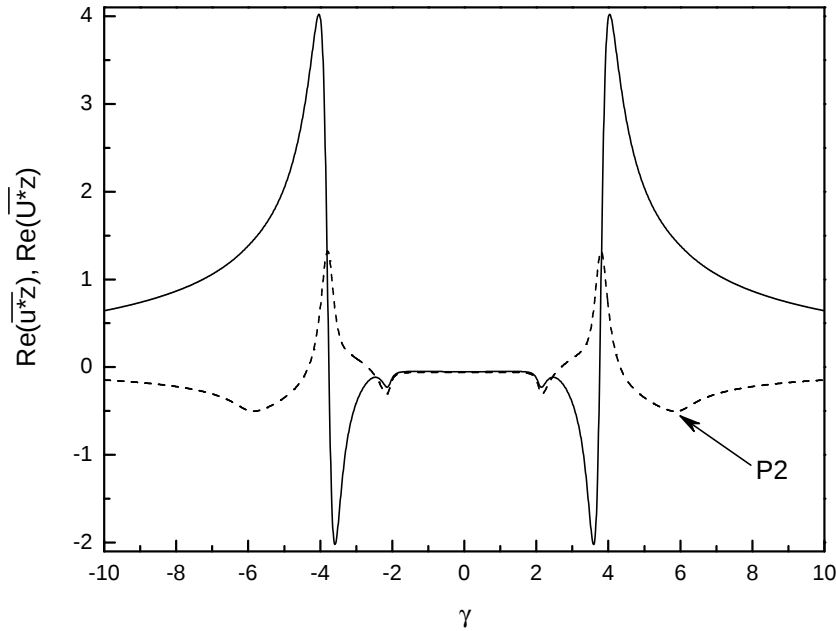


FIG. 2.3 – *Partie réelle des déplacements transformés verticaux solides (trait plein) et fluides (tirets).*

L'influence de la perméabilité est présentée sur la figure 2.4. Si nous diminuons la valeur de perméabilité, le couplage visqueux entre les deux phases devient plus élevé : par exemple, pour de faibles valeurs de perméabilité, l'onde S apparaît sur la phase

fluide à cause du fort couplage visqueux. L'influence de $P2$ est plus importante pour les perméabilités plus élevées : nous retrouvons ainsi une conclusion classique. Par ailleurs, l'allure de la réponse de la phase solide est quasiment la même pour toutes les perméabilités. Ainsi, la perméabilité a une influence plus marquée sur la phase fluide.

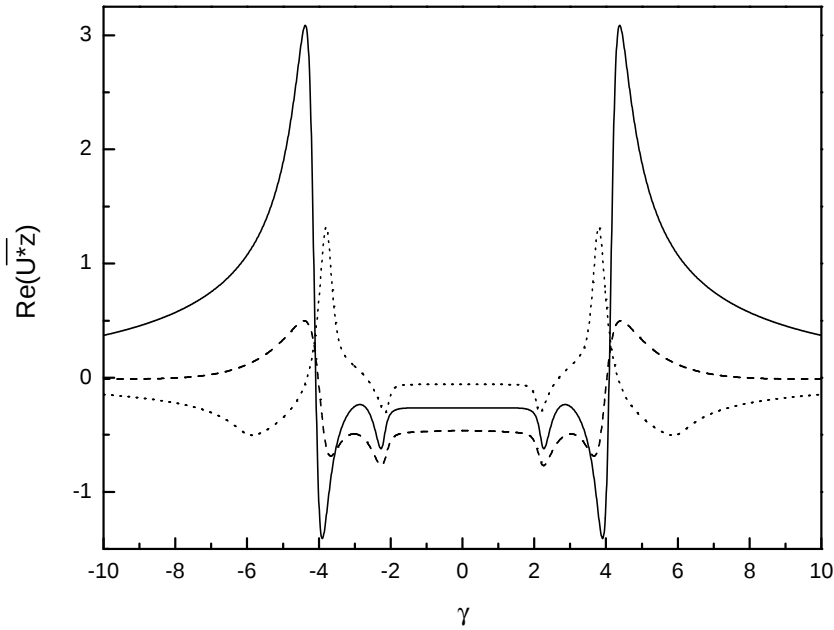


FIG. 2.4 – Influence de la perméabilité sur le déplacement transformé de la phase fluide : perméabilité faible $K = 0.026$ (trait plein), moyenne $K = 0.26$ (tirets) et élevée $K = 2.6$ (pointillés).

2.5.3 Résultats dans le domaine spatial

Les déplacements dans le domaine spatial sont obtenus par transformée de Fourier inverse. Celle-ci est calculée numériquement à l'aide d'un algorithme de transformée de Fourier rapide. Pour obtenir des résultats fiables et précis, les intégrales doivent être tronquées pour des valeurs suffisamment élevées de façon à éviter les distorsions des résultats et le maillage de calcul des fonctions doit être suffisamment fin pour bien représenter les détails des fonctions visualisées dans le domaine transformé. La figure 2.5 donne un exemple de résultats dans le domaine spatial et montre que toutes les ondes sont effectivement mélangées en régime harmonique. On ne peut séparer la contribution de chacune.

L'analyse en régime transitoire présentée dans la suite du mémoire permettra une approche complémentaire en visualisant l'arrivée successive des différentes ondes.

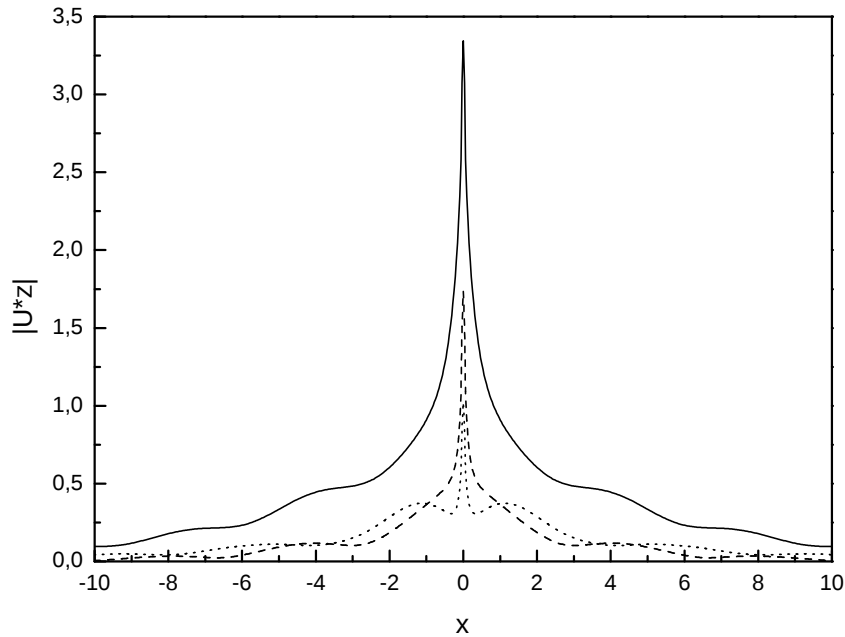


FIG. 2.5 – Influence de la perméabilité sur le déplacement de la phase fluide dans le domaine spatial : perméabilité faible $K = 0.026$ (trait plein), moyenne $K = 0.26$ (tirets) et élevée $K = 2.6$ (pointillés).

2.6 Conclusion

Cette partie a permis de présenter une première approche de l'étude de la propagation d'ondes dans le cadre de régimes harmoniques. La technique semi-analytique que nous avons développée a été explicitée. Les principaux résultats concernent :

- ✓ d'une part la détermination des célérités des différentes ondes ainsi que leurs caractères dispersif et atténué,
- ✓ d'autre part les déplacements des deux phases solide et fluide dans le domaine transformé et dans le domaine spatial.

Une première étude sur l'influence du couplage visqueux sur le comportement du sol a été menée, mettant en évidence notamment l'influence de la perméabilité sur la visualisation de l'onde $P2$ sur la phase fluide.

Nous avons ainsi obtenu grâce à cette approche semi-analytique en régime harmonique un ensemble de résultats indispensable à la compréhension des phénomènes de propagation d'ondes en milieux poreux. Nous verrons dans les chapitres 4 et 5 en quoi ces résultats sont utiles à l'étude des régimes transitoires.

Chapitre 3

Approche numérique par éléments finis

3.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre l'approche par éléments finis en déplacements solide et fluide $\{u - U\}$ ainsi que l'algorithme temporel de résolution numérique du problème étudié. La formulation est écrite dans le cas général tridimensionnel. Nous soulignons également les avantages du code de calcul C++ orienté objet appelé FAFEMO, pour Fast Adaptive Finite Element Modular Objet, développé pour étudier la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux biphasique dans le domaine temporel.

3.2 Formulation éléments finis $\{u - U\}$

3.2.1 Objectif de la méthode des éléments finis et transformation du système du deuxième ordre en temps en un système du premier ordre

Rappelons tout d'abord l'objectif de la formulation éléments finis : celle-ci discrétise spatialement une formulation intégrale obtenue par la méthode des résidus pondérés à partir des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites du problème continu étudié. Nous obtenons ainsi un système différentiel fournissant alors numériquement une solution approchée du système physique. La figure 3.1, dont le principe est inspiré de Dhatt et Touzot [DHA84], résume les différentes étapes de la formulation éléments finis correspondant à notre problématique.

Les équations traitées ne sont pas directement les équations du mouvement : nous utilisons effectivement, pour des raisons d'efficacité numérique que nous détaillons par la suite, les équations suivantes (3.1) et (3.2) issues de deux combinaisons linéaires des équations du mouvement (1.3) et (1.4). Ces combinaisons permettent d'expliciter les

dérivées premières en temps.

- a (1.3) + ϕ (1.4) conduit à :

$$a\sigma_{ij,j} + \phi p_{,i} = [a(1 - \phi)\rho_s + \phi(a - 1)\rho_f] \dot{v}_i - \frac{\phi^2}{K}(V_i - v_i) \quad (3.1)$$

- $\rho_f(a - 1)$ (1.3) - $(1 - \phi)\rho_s$ (1.4) conduit à :

$$\rho_f(a - 1)\sigma_{ij,j} - (1 - \phi)\rho_s p_{,i} = [\rho_f^2(a - 1)\phi + \rho_s\rho_f a(1 - \phi)] \dot{V}_i + \frac{(1 - \phi)\rho_s\phi}{K}(V_i - v_i) \quad (3.2)$$

Les vitesses des particules solide et fluide, respectivement $v_i = \dot{u}_i$ et $V_i = \dot{U}_i$, sont introduites et conduisent à un système différentiel du premier ordre en temps.

Nous obtenons ainsi un problème de Cauchy défini par (3.3) pour lequel nous disposons d'une gamme d'outils numériques efficaces.

$$\begin{cases} \frac{dy(\mathbf{x}, t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, y(\mathbf{x}, t)) \text{ avec } \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T] \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}^m \\ y(\mathbf{x}, t = 0) = y_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

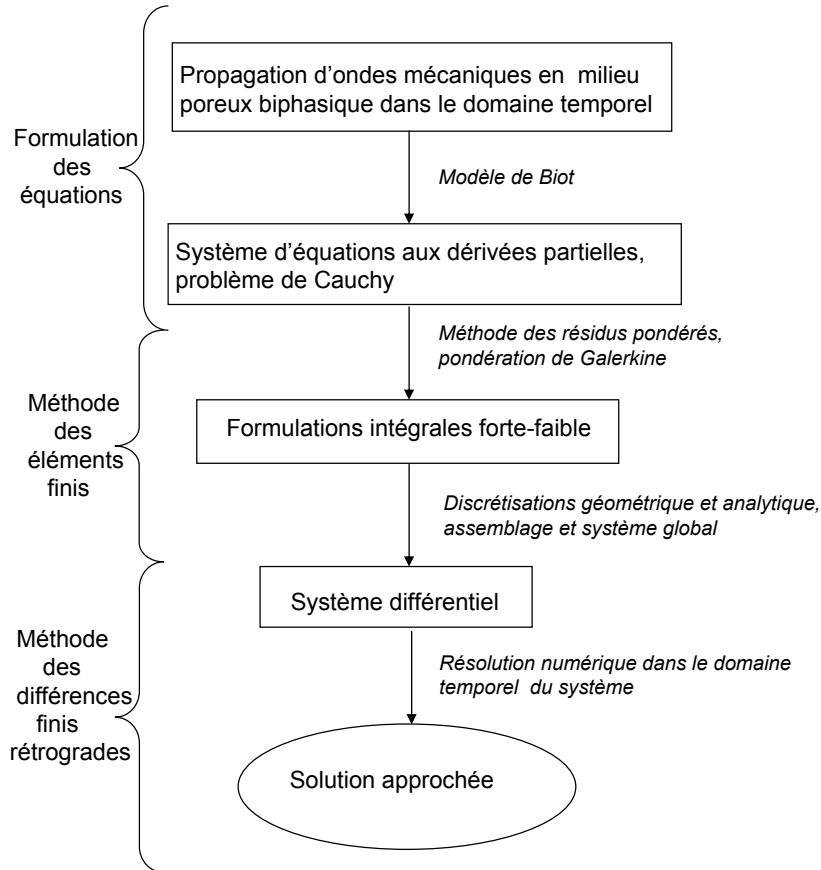


FIG. 3.1 – Transformation des équations du système physique étudié, d'après Dhatt et Touzot [DHA84].

Les degrés de liberté sont les composantes du déplacement macroscopique de la phase solide et de la phase fluide ainsi que les composantes des vitesses associées, rassemblées sous la notation $\mathbf{x}$ dans (3.3).

3.2.2 Formulation intégrale des équations aux dérivées partielles

La méthode des résidus pondérés conduit à la formulation intégrale (3.4) et (3.5). Des conditions aux limites de Dirichlet sont attachées à cette formulation.

La pondération choisie est de type Galerkin : les fonctions de pondération sont ainsi constituées par l'ensemble des variations δf des inconnues f . Nous avons préféré la pondération de Galerkin à une pondération de type Petrov-Galerkin que nous pouvons également rencontrer lors de l'étude des problèmes de propagation d'ondes, Bradford et Katopodes [BRA00]. L'objectif est alors d'amortir les oscillations de type purement numérique. La pondération de Petrov-Galerkin fait en effet apparaître des termes numériques supplémentaires de dissipation qui ne sont pas satisfaisants du point de vue physique.

La formulation intégrale définit en fait un produit scalaire dans l'espace vectoriel $V(f) = [0, T] \times \{\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(\Omega), f \in H_1(\Omega)\}^n$ où T est le temps d'étude et Ω le domaine géométrique d'étude de frontière Γ_Ω . Les deux espaces $L^2(\Omega)$ et $H_1(\Omega)$ sont respectivement :

- ✓ l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable défini par : $\int_\Omega f^2 d\Omega$ existe.
- ✓ l'espace de Sobolev $H_1(\Omega)$ des fonctions de carré sommable à dérivées spatiales de carré sommable défini par : $\{f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega a\sigma_{ij,j}\delta v_i d\Omega + \int_\Omega \phi p_{,i}\delta v_i d\Omega &= \int_\Omega [a(1-\phi)\rho_s + \phi(a-1)\rho_f] \dot{v}_i \delta v_i d\Omega \\ &\quad - \int_\Omega \frac{\phi^2}{K} V_i \delta v_i d\Omega + \int_\Omega \frac{\phi^2}{K} v_i \delta v_i d\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

et

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho_f(a-1)\sigma_{ij,j}\delta V_i d\Omega - \int_\Omega (1-\phi)\rho_s p_{,i}\delta V_i d\Omega &= \int_\Omega [\rho_f^2(a-1)\phi + \rho_s\rho_f a(1-\phi)] \dot{V}_i \delta V_i d\Omega \\ &\quad + \int_\Omega \frac{(1-\phi)\rho_s\phi}{K} V_i \delta V_i d\Omega \\ &\quad - \int_\Omega \frac{(1-\phi)\rho_s\phi}{K} v_i \delta V_i d\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.3 Formulation faible

La formulation intégrale est ensuite transformée à l'aide d'une intégration par parties multidimensionnelle (théorème de Green) ce qui a pour effet d'abaisser d'une unité l'ordre de dérivation de certaines fonctions. Les conditions imposées à ces fonctions sont donc moins fortes. Cette nouvelle formulation est dite faible alors que la forme initiale est dite forte. Les conditions aux limites de Dirichlet sur Γ_Ω restent attachées à la formulation faible. La formulation faible s'écrit alors :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} a \sigma_{ij} \delta v_{i,j} d\Omega + \int_{\Gamma_\Omega} a \sigma_{ij} e_j \delta v_i d\Gamma - \int_{\Omega} \phi p \delta v_{i,i} d\Omega + \int_{\Gamma_\Omega} \phi p \delta v_i e_i d\Gamma &= - \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{K} V_i \delta v_i d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} [a(1-\phi)\rho_s + \phi(a-1)\rho_f] \dot{v}_i \delta v_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{K} v_i \delta v_i d\Omega \end{aligned} \quad (3.6)$$

et

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \rho_f(a-1)\sigma_{ij} \delta V_{i,j} d\Omega + \int_{\Gamma_\Omega} \rho_f(a-1)\sigma_{ij} e_j \delta V_i d\Gamma + \int_{\Omega} (1-\phi)\rho_s p \delta V_{i,i} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_\Omega} (1-\phi)\rho_s p \delta V_i e_i d\Gamma = \int_{\Omega} [\rho_f^2(a-1)\phi + \rho_s \rho_f a(1-\phi)] \dot{V}_i \delta V_i d\Omega \\ + \int_{\Omega} \frac{(1-\phi)\rho_s \phi}{K} V_i \delta V_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{(1-\phi)\rho_s \phi}{K} v_i \delta V_i d\Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2.4 Discrétisations géométrique et analytique

À ce niveau, le problème est encore de nature continue. Il est ensuite discrétisé d'une part géométriquement et d'autre part analytiquement.

✓ Discrétisation géométrique :

la discrétisation géométrique consiste à partager sans discontinuité le domaine Ω en petits sous-domaines Ω_e tels que :

$$\begin{cases} \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j \\ \bigcup_{e=1}^{n_{\text{élément}}} \Omega_e \simeq \Omega \end{cases}$$

Chaque sous-domaine est appelé élément : nous choisissons respectivement des éléments triangulaires T3 à 3 nœuds géométriques et tétraédriques TH4 à 4 nœuds géométriques pour des maillages de géométries bidimensionnelle et tridimensionnelle, Dhatt et Touzot [DHA84]. Le calcul d'une intégrale sur Ω se remplace alors par le calcul d'une somme finie d'intégrales sur chaque élément Ω_e et s'écrit :

$$\int_{\Omega} g d\Omega = \sum_{e=1}^{n_{\text{élément}}} \int_{\Omega_e} g d\Omega_e$$

Les intégrales sur Ω_e sont appelées intégrales élémentaires.

Afin de standardiser les calculs, un élément de référence, de forme simple, parfois appelé élément parent, sert de référence et est noté Ω_{ref} . Les éléments réels sont obtenus par une simple transformation géométrique de l'élément Ω_{ref} : cela correspond à un changement de variables faisant intervenir le jacobien $\det J$ de cette transformation géométrique. Les intégrales élémentaires se déduisent alors de l'intégrale de référence de la façon suivante :

$$\int_{\Omega_e} g(\mathbf{x}) d\Omega_e = \int_{\Omega_{ref}} g(\mathbf{x}(\zeta)) \det J d\Omega_{ref}$$

où l'application bijective qui à ζ associe $\mathbf{x}$ est la transformation définissant les coordonnées $\mathbf{x}$ des points de l'élément réel à partir des coordonnées ζ des points correspondants de l'élément de référence. Ainsi, à chaque élément Ω_e correspond une transformation différente. Les figures 3.2 et 3.3 illustrent pour une géométrie tridimensionnelle la transformation géométrique entre les deux éléments réel et de référence.

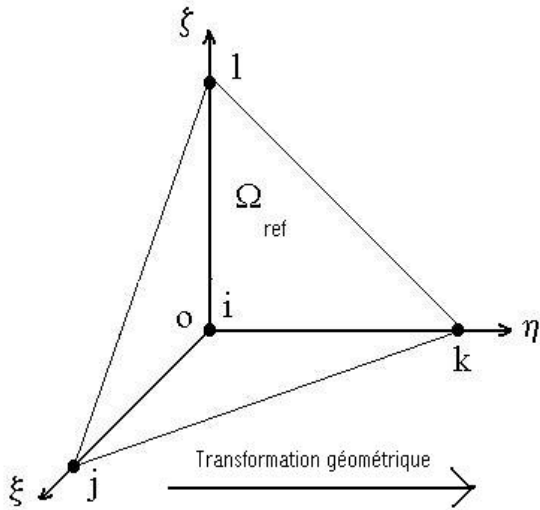


FIG. 3.2 – *Elément tridimensionnel de référence Ω_{ref} de coordonnées ζ .*

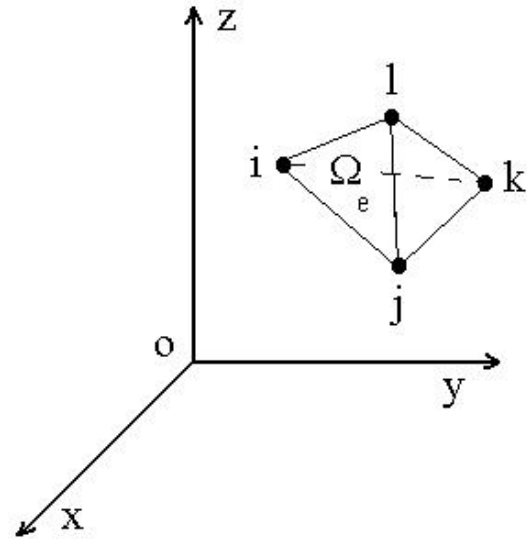


FIG. 3.3 – *Elément tridimensionnel réel Ω_e de coordonnées $\mathbf{x}$.*

✓ Discrétisation analytique :

la discrétisation analytique consiste à approximer les valeurs inconnues du problème (u_i, U_i, v_i et V_i) à l'aide de points particuliers appelés nœuds d'interpolation. Nous choisissons alors sur le domaine Ω N nœuds d'interpolation. Sur chacun des éléments géométriques Ω_e précédents, nous approximations les valeurs inconnues sur une base fonctionnelle de dimension finie. Cette base est en général polynomiale. En utilisant la notation $\tilde{f}$ pour les valeurs inconnues approximées, nous obtenons pour chaque élément Ω_e :

$$\begin{aligned} u_i &\approx \tilde{u}_i = \langle n_u \rangle \{u_i^n\}, \quad U_i \approx \tilde{U}_i = \langle n_U \rangle \{U_i^n\}, \\ v_i &\approx \tilde{v}_i = \langle n_v \rangle \{v_i^n\}, \quad V_i \approx \tilde{V}_i = \langle n_V \rangle \{V_i^n\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

où $\langle n_u \rangle, \langle n_U \rangle, \langle n_v \rangle, \langle n_V \rangle$ sont les fonctions d'interpolation et $\{u_i^n\}, \{U_i^n\}, \{v_i^n\}, \{V_i^n\}$ ($i = x, y, z$) les variables nodales, à savoir les valeurs des inconnues du problème aux n nœuds d'interpolation. Les fonctions d'interpolation que nous avons choisies sont identiques et correspondent à une approximation polynomiale des inconnues sous la forme de polynômes de Lagrange.

- ✓ enfin, il est important de noter que les nœuds géométriques ne sont pas toujours confondus avec les nœuds d'interpolation. Si tel n'est pas le cas, les éléments sont dits isoparamétriques : nous nous plaçons dans ce cadre.

3.2.5 Discrétisation de la forme faible élémentaire

A l'aide de l'approximation analytique précédente et en nous plaçant sur un seul élément Ω_e , nous discrétisons la formulation faible élémentaire correspondant aux équations (3.6) et (3.7) dans lesquelles sont introduites les lois de comportement (1.1), (1.2) et (1.5).

Notons tout d'abord que, avec f symbolisant les inconnues, nous avons :

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= \langle n_{,j} \rangle \{f_i^n\} \\ \delta f_i &= \langle n \rangle \{\delta f_i^n\} \\ \delta f_{i,j} &= \langle n_{,j} \rangle \{\delta f_i^n\} \end{aligned}$$

En reprenant chaque terme de la formulation faible, il vient pour Ω_e :

- ✓ équations (3.6) et lois de comportement (1.1), (1.2) et (1.5) :

- premier terme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} a \sigma_{ij,j} \delta v_i d\Omega_e &= - \int_{\Omega_e} a \sigma_{ij} \delta v_{i,j} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} a \sigma_{ij} e_j \delta v_i d\Gamma_e \\ &= - \langle \delta v^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} a [B]^t [D] [B] d\Omega_e \{u^{(n)}\} \\ &\quad - \langle \delta v^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} a [B]^t [F] [B] d\Omega_e \{v^{(n)}\} \\ &\quad - \langle \delta v^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} a [A]^t M \beta \phi [\text{Unit}] [A] d\Omega_e \{U^{(n)}\} \\ &\quad + \langle \delta v^{(n)} \rangle \int_{\Gamma_e} a [N]^t \{T\} d\Gamma_e \end{aligned}$$

- deuxième terme :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_e} \phi p_{,i} \delta v_i d\Omega_e &= - \int_{\Omega_e} \phi p \delta v_{i,i} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \phi p \delta v_i e_i d\Gamma_e \\
 &= - \langle \delta v^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} [A]^t \phi M (\phi - \beta) [\text{Unit}] [A] d\Omega_e \{u^{(n)}\} \\
 &\quad + \langle \delta v^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} [A]^t \phi^2 M [\text{Unit}] [A] d\Omega_e \{U^{(n)}\} \\
 &\quad + \langle \delta v^{(n)} \rangle \int_{\Gamma_e} \phi [N]^t \{p\} d\Gamma_e
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \{u^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} \{u_x^n\} \\ \{u_y^n\} \\ \{u_z^n\} \end{Bmatrix}, \{U^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} \{U_x^n\} \\ \{U_y^n\} \\ \{U_z^n\} \end{Bmatrix}, \{v^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} \{v_x^n\} \\ \{v_y^n\} \\ \{v_z^n\} \end{Bmatrix} \text{ et } \{V^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} \{V_x^n\} \\ \{V_y^n\} \\ \{V_z^n\} \end{Bmatrix}.$$

De plus, $\{T\}$ et $\{p\}$ s'écrivent sous la forme $\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix}$ et $\{p\} = \begin{Bmatrix} p \\ p \\ p \end{Bmatrix}$ où

$T_i = \sigma_{ij} e_j$ est une composante du vecteur contrainte correspondant aux conditions aux limites imposées à la frontière du domaine et p une composante de la pression fluide sur cette frontière ($i = x, y, z$).

- troisième terme :

$$- \int_{\Omega_e} \frac{\phi^2}{K} V_i \delta v_i d\Omega_e = - \langle \delta v^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} \frac{\phi^2}{K} [N]^t [N] d\Omega_e \{V^{(n)}\}$$

- quatrième terme :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega_e} [a(1 - \phi)\rho_s + \phi(a - 1)\rho_f] \dot{v}_i \delta v_i d\Omega_e = \\
 &\langle \delta v^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} [a(1 - \phi)\rho_s + \phi(a - 1)\rho_f] [N]^t [N] d\Omega_e \{\dot{v}^{(n)}\}
 \end{aligned}$$

- cinquième terme :

$$\int_{\Omega_e} \frac{\phi^2}{K} v_i \delta v_i d\Omega_e = \langle \delta v^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} \frac{\phi^2}{K} [N]^t [N] d\Omega_e \{v^{(n)}\}$$

✓ équations (3.7) et lois de comportement (1.1), (1.2) et (1.5) :

- premier terme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \rho_f(a-1)\sigma_{ij,j}\delta V_i d\Omega_e &= - \int_{\Omega} \rho_f(a-1)\sigma_{ij}\delta V_{i,j} d\Omega + \int_{\Gamma_{\Omega}} \rho_f(a-1)\sigma_{ij}e_j\delta V_i d\Gamma \\ &\quad - \langle \delta V^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} \rho_f(a-1)[B]^t[D][B]d\Omega_e \{u^{(n)}\} \\ &\quad - \langle \delta V^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} \rho_f(a-1)[B]^t[F][B]d\Omega_e \{v^{(n)}\} \\ &\quad - \langle \delta V^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} \rho_f(a-1)M\beta\phi[A]^t[\text{Unit}][A]d\Omega_e \{U^{(n)}\} \\ &\quad + \langle \delta V^{(n)} \rangle \int_{\Gamma_e} \rho_f(a-1)[N]^t\{T\}d\Gamma_e \end{aligned}$$

- deuxième terme :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_e} (1-\phi)\rho_s p_{,i}\delta V_i d\Omega_e &= \int_{\Omega} (1-\phi)\rho_s p \delta V_{i,i} d\Omega - \int_{\Gamma_{\Omega}} (1-\phi)\rho_s p \delta V_i e_i d\Gamma \\ &\quad \langle \delta V^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} (1-\phi)\rho_s M(\phi-\beta)[A]^t[\text{Unit}][A]d\Omega_e \{u^{(n)}\} \\ &\quad - \langle \delta V^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} (1-\phi)\rho_s M\phi[A]^t[\text{Unit}][A]d\Omega_e \{U^{(n)}\} \\ &\quad - \langle \delta V^{(n)} \rangle \int_{\Gamma_e} (1-\phi)\rho_s [N]^t\{p\}d\Gamma_e \end{aligned}$$

- troisième terme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} [\rho_f^2(a-1)\phi + \rho_s\rho_f a(1-\phi)]\dot{V}_i\delta V_i d\Omega_e &= \\ \langle \delta V^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} [\rho_f^2(a-1)\phi + \rho_s\rho_f a(1-\phi)][N]^t[N]d\Omega_e \{\dot{V}^{(n)}\} \end{aligned}$$

- quatrième terme :

$$\int_{\Omega_e} \frac{(1-\phi)\rho_s\phi}{K}V_i\delta V_i d\Omega_e = \langle \delta V^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} \frac{(1-\phi)\rho_s\phi}{K}[N]^t[N]d\Omega_e \{V^{(n)}\}$$

- cinquième terme :

$$- \int_{\Omega_e} \frac{(1-\phi)\rho_s\phi}{K}v_i\delta V_i d\Omega_e = - \langle \delta V^{(n)} \rangle \int_{\Omega_e} \frac{(1-\phi)\rho_s\phi}{K}[N]^t[N]d\Omega_e \{v^{(n)}\}$$

Enfin, rappelons que le problème traité a été ramené à un problème de Cauchy, problème différentiel du premier ordre en temps. L'introduction des vitesses solide et fluide $v_i = \dot{u}_i$ et $V_i = \dot{U}_i$ conduit aux deux égalités suivantes :

$$\langle \delta u^{(n)} \rangle \left[\int_{\Omega_e} [N]^t[N]d\Omega_e \{\dot{u}^{(n)}\} - \int_{\Omega_e} [N]^t[N]d\Omega_e \{v^{(n)}\} \right] = 0$$

et :

$$\langle \delta U^{(n)} \rangle \left[\int_{\Omega_e} [N]^t [N] d\Omega_e \{ \dot{U}^{(n)} \} - \int_{\Omega_e} [N]^t [N] d\Omega_e \{ V^{(n)} \} \right] = 0$$

Les différentes matrices suivantes ont été introduites :

- $[N]$ est la matrice des fonctions d'interpolation : $[N] = \begin{bmatrix} \langle n \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle n \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle n \rangle \end{bmatrix}$
- $[A]$ est la matrice des dérivées spatiales de $[N]$ et $[B]$ intervient dans la discrétisation des lois de comportement :

$$[A] = \begin{bmatrix} \langle n, x \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle n, y \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle n, z \rangle \end{bmatrix} \text{ et } [B] = \begin{bmatrix} \langle n, x \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle n, y \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle n, z \rangle \\ \langle n, y \rangle & \langle n, x \rangle & 0 \\ \langle n, z \rangle & 0 & \langle n, x \rangle \\ 0 & \langle n, z \rangle & \langle n, y \rangle \end{bmatrix}$$

- $[D]$ intervient dans la discrétisation des lois de comportement et $[F]$ introduit spécifiquement l'amortissement viscoélastique hystérétique de Rayleigh :

$$[D] = \begin{bmatrix} (\lambda_0 - \beta M \phi + M \beta^2) [\text{Unit}] + 2\mu [I] & 0 \\ 0 & \mu [I] \end{bmatrix} \text{ et } [F] = \eta [D]$$

- $[\text{Unit}]$ est la matrice définie par : $[\text{Unit}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- $[I]$ est la matrice identité : $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.2.6 Bilan élémentaire

Introduisons maintenant le vecteur élémentaire des variables $\{W_e\}$ et le vecteur élémentaire des sollicitations $\{F_e\}$, avec la notation t pour la transposée :

- $\{W_e\} = \left\langle \langle u^{(n)} \rangle, \langle U^{(n)} \rangle, \langle v^{(n)} \rangle, \langle V^{(n)} \rangle \right\rangle^t = \begin{bmatrix} \{u^{(n)}\} \\ \{U^{(n)}\} \\ \{v^{(n)}\} \\ \{V^{(n)}\} \end{bmatrix}$
- $\{F_e\} = \left\langle 0, 0, \int_{\Gamma_e} [N] (a \langle T \rangle + \phi \langle p \rangle) d\Gamma_e, \int_{\Gamma_e} [N] (\rho_f (a - 1) \langle T \rangle - \rho_s (1 - \phi) \langle p \rangle) d\Gamma_e \right\rangle^t$

La formulation faible s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \langle \delta W_e \rangle & \left\{ \begin{bmatrix} [m_e] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [m_e] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [m_{se}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [m_{fe}] \end{bmatrix} \{\dot{W}_e\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -[m_e] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[m_e] \\ [k_{se}] & [k_{sfe}] & [c_{se}] & [c_{sfe}] \\ [k_{fse}] & [k_{fe}] & [c_{fse}] & [c_{fe}] \end{bmatrix} \{W_e\} \right\} \\ & = \langle \delta W_e \rangle \{F_e\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

soit :

$$\langle \delta W_e \rangle \left\{ [M_e] \{\dot{W}_e\} + [K_e] \{W_e\} \right\} = \langle \delta W_e \rangle \{F_e\} \quad (3.10)$$

avec $[M_e]$ et $[K_e]$ les matrices masse et raideur élémentaires. Dans l'écriture du système (3.9), nous utilisons les différentes matrices suivantes :

- $[m_e] = \int_{\Omega_e} [N]^t [N] d\Omega_e$
- $[m_{se}] = \int_{\Omega_e} [a(1 - \phi)\rho_s + \phi(a - 1)\rho_f] [N]^t [N] d\Omega_e$
- $[m_{fe}] = \int_{\Omega_e} [\rho_f^2(a - 1)\phi + \rho_s\rho_f a(1 - \phi)] [N]^t [N] d\Omega_e$
- $[k_{se}] = \int_{\Omega_e} (a[B]^t [D] [B] + \phi M(\phi - \beta) [A]^t [\text{Unit}] [A]) d\Omega_e$
- $[k_{fe}] = \int_{\Omega_e} \phi M[(a - 1)\beta\rho_f + (1 - \phi)\rho_s] [A]^t [\text{Unit}] [A] d\Omega_e$
- $[k_{sfe}] = \int_{\Omega_e} \phi M(\beta a - \phi) [A]^t [\text{Unit}] [A] d\Omega_e$
- $[k_{fse}] = \int_{\Omega_e} (\rho_f(a - 1)[B]^t [D] [B] - (1 - \phi)\rho_s M(\phi - \beta) [A]^t [\text{Unit}] [A]) d\Omega_e$
- $[c_{se}] = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\phi^2}{K} [N]^t [N] + a[B]^t [F] [B] \right) d\Omega_e$
- $[c_{fe}] = \int_{\Omega_e} \frac{(1 - \phi)\rho_s\phi}{K} [N]^t [N] d\Omega_e$
- $[c_{sfe}] = \int_{\Omega_e} -\frac{\phi^2}{K} [N]^t [N] d\Omega_e$
- $[c_{fse}] = \int_{\Omega_e} \left(-\frac{(1 - \phi)\rho_s\phi}{K} [N]^t [N] + \rho_f(a - 1)[B]^t [F] [B] \right) d\Omega_e$

Notons que les blocs de couplage sont : $[k_{sfe}]$, $[k_{fse}]$, $[c_{se}]$, $[c_{fe}]$, $[c_{sfe}]$, $[c_{fse}]$.

Chacun des 16 blocs intervenant dans les matrices élémentaires précédentes est lui-même une matrice carrée de dimension égale au nombre de nœuds par élément multiplié

par la dimension du problème, soit 6×6 en 2D pour les éléments triangulaires et 12×12 en 3D pour les éléments tétraédriques utilisés. Les matrices masse et raideur élémentaires sont donc de dimension 24×24 et 48×48 respectivement en 2D et en 3D. Enfin, les vecteurs $\{W_e\}$ et $\{F_e\}$ sont de dimensions respectives 24 et 48.

3.2.7 Bilan sur le système discret

Le système discret est obtenu par addition des produits scalaires élémentaires et s'écrit donc pour l'ensemble des éléments sous la forme suivante :

$$\sum_{e=1}^{n_{\text{élément}}} \langle \delta W_e \rangle \left\{ [M_e] \{\dot{W}_e\} + [K_e] \{W_e\} \right\} = \sum_{e=1}^{n_{\text{élément}}} \langle \delta W_e \rangle \{F_e\} \quad (3.11)$$

Nous obtenons ainsi une approximation de la formulation faible dans un sous-espace de dimension finie de $V(f)$.

3.2.8 Procédure d'assemblage et notion de système discret global

Une procédure standard d'assemblage est effectuée : nous séparons, élément par élément, les valeurs imposées, notées W_0 , émanant des conditions aux limites de type Dirichlet des valeurs inconnues, notées W_g , sous la forme (3.12) et (3.13).

$$\{W_{total}\} = \left\{ \begin{array}{c} \{W_0\} \\ \{W_g\} \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

soit :

$$\{\delta W_{total}\} = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \{\delta W_g\} \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

Seuls les degrés de liberté inconnus sont assemblés afin d'obtenir la forme globale, indiquée par g, du système discrétisé qui se présente sous la forme (3.14) suivante :

$$[M_g] \{\dot{W}_g\} + [K_g] \{W_g\} = \{F_g\} \quad (3.14)$$

$[M_g]$ et $[K_g]$ sont les matrices masse et raideur globales, $\{W_g\}$ le vecteur global des variables et $\{F_g\}$ le vecteur global des sollicitations.

3.3 Algorithme temporel de résolution numérique

L'objet de cette section est de résoudre numériquement le système obtenu (3.14) dans le cadre de régimes transitoires. Nous présentons ci-dessous l'algorithme de résolution choisi.

Introduisons le résidu global $\Psi(W_g, t)$ défini par :

$$\{\Psi(W_g, t)\} = \{F_g\} - [K_g] \{W_g\} \quad (3.15)$$

La forme globale du système du premier ordre en temps s'écrit alors :

$$\left\{ \frac{dW_g}{dt} \right\} = [M_g]^{-1} \{ \Psi(W_g, t) \} \quad (3.16)$$

Le schéma d'intégration temporelle utilisé correspond à la méthode des différences rétrogrades, Crouzeix et Mignot [CRO97]. C'est une méthode efficace et particulièrement stable pour des problèmes différentiels de Cauchy numériquement raides. L'algorithme de la méthode des différences rétrogrades est ici modifié par l'introduction de paramètres α_j ($j = 1$ à k) et s'écrit à l'ordre k sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{While}(t_n \leq t_{max}) \\ & \left\{ \begin{array}{l} \{ \Delta W_n^i \} = \Delta t_n \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j [M_{n-j}^i]^{-1} \times \\ \quad \{ \Psi_{n-j}(\{W_{n-j}\} + \alpha_j \{ \Delta W_{n-j}^{i-1} \}, t_n + \alpha_j \Delta t_n) \} \\ i = 1, 2, \dots \text{ until } \| \{ \Delta W_n^i \} - \{ \Delta W_n^{i-1} \} \| \leq \text{tolerance} \end{array} \right\} \\ & \{W_{n+1}\} = \{W_n\} + \{ \Delta W_n \} \\ & t_{n+1} = t_n + \Delta t_n \\ & \text{end while} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Il s'agit d'une méthode de résolution temporelle à pas multiples permettant de calculer les inconnues i à partir des valeurs connues précédentes $i - 1, i - 2, \dots$

Par ailleurs, c'est une méthode par approximations successives présentant des itérations internes : plusieurs itérations à chaque pas de temps et donc plusieurs évaluations de $[M_g]$ et $\{ \Psi_g \}$ sont nécessaires avant que le critère de tolérance ne soit atteint.

Les paramètres α_j ($\alpha_j \in [0, 1]$) décentrent le schéma et le rendent semi-implicite.

Intéressons-nous à la stabilité de la méthode de résolution temporelle choisie. Celle-ci doit en effet vérifier les deux critères suivants :

- ✓ le premier consiste à vérifier la condition Courant-Friedrich-Levy (CFL) liée à notre problème de nature propagative : cette condition relie les pas de discrétisation spatiale et temporelle en définissant un pas de temps critique $\Delta t_{critique} = \eta \times \frac{\Delta x}{c}$ suffisamment petit pour que l'onde la plus rapide mette suffisamment de pas de temps pour parcourir un élément. Dans l'expression $\Delta t_{critique}$ précédente, η est un coefficient, c est la plus grande des vitesses et Δx est le pas du maillage, à savoir le pas de discrétisation spatiale.
- ✓ le second critère de stabilité est lié aux itérations internes à chaque pas de temps de la méthode des différences rétrogrades. A l'ordre 1, nous pouvons écrire, pour une itération i :

$$\{ \Delta W_n^i \} = \Delta t_n [M_n^i]^{-1} \times \Psi_n(\{W_n\} + \alpha \{ \Delta W_n^{i-1} \}, t_n + \alpha \Delta t_n) \quad (3.18)$$

Nous pouvons synthétiser l'écriture précédente sous la forme générale suivante :

$$\{\Delta W_n^i\} = \mathbf{F}(\{\Delta W_n^{i-1}\})$$

Le critère de convergence doit vérifier :

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \{\Delta W_n\}} \right\| < 1$$

soit :

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \{W_n\}} \frac{\partial \{W_n\}}{\partial \{\Delta W_n\}} \right\| < 1$$

Il vient alors à l'aide de (3.18) :

$$\alpha \Delta t_n \left\| \frac{\partial}{\partial \{W_n\}} \{[M_n]^{-1} \Psi(\{W_n\}, t_n)\} \right\| < 1$$

Le problème étant linéaire, la norme précédente est constante, il vient donc :

$$\alpha \Delta t_n < \gamma \quad (3.19)$$

Un second pas de temps critique est alors donné par (3.19).

- ✓ c'est le plus critique des deux pas de temps précédents qui conditionne la stabilité de la méthode.

Des comparaisons avec l'algorithme de Runge-Kutta à l'ordre 4 (méthode à un pas) ont été effectuées : les deux techniques donnent des résultats similaires, Chambarel et al. [CHA00]. La méthode des différences rétrogrades modifiée permet cependant un meilleur contrôle des oscillations d'origine numérique.

3.4 Code C++ FAFEMO

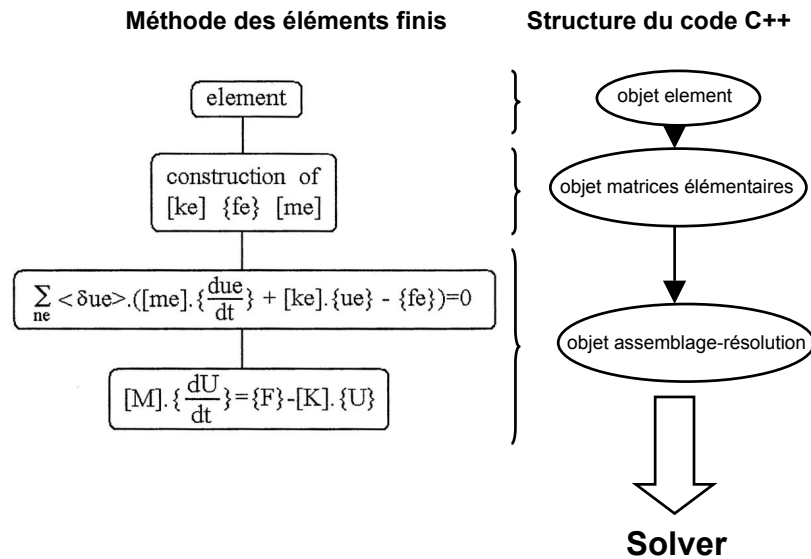
Le code C++ orienté objet développé pour traiter des problèmes de propagation d'ondes mécaniques en régime transitoire s'appelle FAFEMO. Il est organisé en trois objets qui correspondent aux différentes étapes de la méthode générale des éléments finis, comme schématisé sur la figure 3.4 :

- ✓ **Objet élément :**

après lecture des données de base (nombre de nœuds, dimension du problème, etc...) par un fichier texte directement issu du mailleur, cet objet contient toutes les fonctions nécessaires à la construction des éléments géométriques.

- ✓ **Objet matrices élémentaires :**

en héritage simple avec l'objet élément, il construit les matrices masse et raideur élémentaires, les vecteurs force et résidu élémentaires relatifs au problème étudié. Il lit également les caractéristiques physiques du problème.

FIG. 3.4 – Structure du code *Eléments Finis*.**✓ Objet assemblage et résolution temporelle :**

contenant les deux classes assemblage et résolution, toujours en héritage simple avec l'objet précédent, il assemble et met à jour les données construisant ainsi le système global. Ensuite, il contient l'algorithme de résolution temporelle (3.17). Enfin, il écrit les résultats dans un fichier de sortie qui peut être exploité par le mailleur utilisé.

Ainsi, chaque solveur est constitué de 3 objets indépendants reliés par héritage. Nous obtenons en pratique un code compact de moins de 1 000 lignes C++.

Un des avantages du code FAFEMO est sa souplesse. Ainsi, le changement d'un objet, opération simple car indépendante des autres parties du code, permet par exemple :

- ✓ de passer d'une géométrie 2D à une géométrie 3D par changement de l'objet élément,
- ✓ de traiter d'autres problèmes physiques de propagation d'ondes, électromagnétisme par exemple, en modifiant l'objet matrices élémentaires.

D'autres avantages de FAFEMO doivent être soulignés :

- ✓ en choisissant comme points d'intégration numérique pour le calcul des différentes intégrales les nœuds d'interpolation, et grâce aux combinaisons linéaires (3.1) et (3.2) effectuées au tout début du chapitre, la matrice masse élémentaire est diagonale. Elle est par conséquent mémorisée sous forme vectorielle et son inversion

est alors triviale : ce point est particulièrement important car, dans l'expression (3.16), la nécessité d'inverser la matrice masse globale de façon simple et efficace apparaît clairement. Le choix des nœuds d'interpolation comme points d'intégration numérique revient en fait à concentrer la masse de l'élément aux nœuds, Chambarel et al. [CHA00].

- ✓ nous utilisons une technique matrix-free : la matrice raideur globale et le vecteur force global ne sont jamais construits ni stockés. En effet, le processus d'assemblage étant itératif par élément, nous calculons la matrice raideur et le vecteur force élémentaires au fur et à mesure puis nous effectuons le produit et l'assemblage élément par élément, ce qui permet donc de ne stocker temporairement que les données relatives à un élément. Seuls la matrice masse globale diagonale et le vecteur résidu global sont stockés sous forme vectorielle de dimension égale au nombre de degrés de liberté actifs. Le gain en espace mémoire est alors considérable.
- ✓ à chaque pas de temps, la solution initiale est proche de la solution recherchée, le nombre d'itérations internes dues aux approximations successives de la méthode des différences rétrogrades est donc faible, deux ou trois en pratique. En limitant ainsi le nombre d'itérations, la performance en coût CPU est bonne. Les problèmes bidimensionnels comme ceux présentés dans le chapitre 4 sont facilement traités par un ordinateur usuel.
- ✓ enfin, un système multigrid expert, appelé AMS pour Automatic Multigrid System, est utilisé : il permet d'activer ou de désactiver une partie du domaine Ω . En sélectionnant ainsi parmi l'ensemble des éléments du problème ceux qui sont actifs de ceux qui ne le sont pas, la taille du vecteur global des inconnues est optimisée et se trouve particulièrement réduite aux faibles temps. Des considérations physiques comme la prise en compte de la plus grande des vitesses de propagation et des considérations numériques comme l'introduction d'un coefficient de sécurité et des tests comparatifs sans AMS conditionnent l'AMS. La classe assemblage assure la mise à jour aux bonnes dimensions en actualisant le nombre d'inconnues du système global lorsque le système AMS est activé. Cependant l'avantage numérique en résultant tend naturellement à s'amenuiser avec le temps.

3.5 Conclusion

Nous avons développé FAFEMO afin de nous intéresser au problème de propagation d'ondes mécaniques dans les milieux poreux dans le domaine temporel. Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation éléments finis, son développement numérique, l'algorithme de résolution et l'implémentation dans le code de calcul. FAFEMO permet ainsi d'obtenir la réponse en déplacements et vitesses solide et fluide pour tout point du massif semi-infini poreux biphasique en présence d'une sollicitation transitoire.

La dualité espace mémoire et rapidité de calcul en temps CPU est très bien gérée dans FAFEMO pour un système du premier ordre en temps. Un ordinateur usuel traite effectivement les problèmes bidimensionnels et permet d'aborder des problèmes tridimensionnels de taille réduite. Nous avons formulé le système différentiel initialement du deuxième ordre en un système du premier ordre : la classe résolution temporelle est très efficace et avantageuse vis à vis de la capacité mémoire de la machine. Néanmoins, pour des systèmes de taille globale modeste, un compromis peut être trouvé entre le stockage des matrices globales, coûteuses en espace mémoire, et un processus itératif en conséquence plus rapide, donc un gain en temps CPU. C'est un véritable choix à effectuer et à adapter à la nature du problème traité : la réponse est fonction de la taille du problème, des capacités des machines, mémoire et performance CPU, et de leur évolution dans l'avenir, surtout en terme d'espace mémoire. Un autre objet de résolution temporelle pourrait alors être développé au deuxième ordre.

Notons enfin que nous n'utilisons pas de conditions aux frontières du domaine de type frontières absorbantes ou éléments infinis de par la nature transitoire du problème traité. Chaque résultat est ainsi valide sur une certaine durée. Le maillage est choisi par rapport à cette durée d'étude et par rapport aux points d'étude désirés. De plus, avec l'option AMS, seul un nombre restreint d'éléments est actif, ce qui permet des maillages étendus et rend secondaires les conditions aux frontières du domaine à la limite de la zone d'étude.

Chapitre 4

Résultats bidimensionnels

4.1 Introduction

Cette partie présente différentes études bidimensionnelles menées avec le code de calcul FAFEMO présenté dans le chapitre précédent. Dans tous les cas, nous considérons l'étude du régime transitoire généré par l'application d'une impulsion en surface du massif, cf. chapitre 1 section 8. L'analyse est effectuée en termes de propagation d'ondes : outre l'étude des temps d'arrivée des différentes ondes, des cartographies du massif sont analysées.

Dans un premier temps, nous proposons une analyse détaillée du comportement mécanique d'un sol poreux biphasique homogène et saturé publiée dans *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* sous la référence [MES05c]. Nous reproduisons cet article dans la section 4.2. Il présente les déplacements des phases solide et fluide en surface et en profondeur du massif. Les temps d'arrivée des ondes volumiques et de surface sont étudiés. Une attention particulière est portée sur les points suivants :

- ✓ visualisation de l'onde de compression de seconde espèce,
- ✓ influence du couplage visqueux sur le comportement du milieu.

La section 4.3 reproduit les actes d'*EURODYN 2005* sous la référence [MES05a]. Elle complète l'analyse des couplages mécaniques en étudiant l'influence du couplage massique par l'intermédiaire de la tortuosité et du couplage élastique fonction de la nature du sol.

Par la suite, nous centrons notre étude sur la comparaison d'un sol homogène et d'un sol hétérogène. Nous effectuons ainsi une première approche de modélisation de milieu hétérogène constitué d'une base homogène dans laquelle des inclusions sont réparties de manière aléatoire. Nous visualisons notamment des cartographies du massif. Une partie des résultats obtenus a été publiée dans *Lecture Notes in Computer Science*, Mesgouez et al. [MES05b].

Enfin, dans la dernière section, nous nous intéressons à la saturation du milieu poreux en présentant une étude détaillée sur le comportement d'un sol partiellement saturé.

4.2 Transient mechanical wave propagation in semi-infinite porous media using a finite element approach in *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous proposons une étude numérique dans le domaine temporel de la propagation des ondes mécaniques dans un sol semi-infini soumis à une charge impulsionnelle. Le massif est modélisé par un milieu poreux saturé viscoélastique à l'aide de la théorie complète de Biot. Tous les couplages et un amortissement hystérétique de Rayleigh sont pris en compte. Une méthode précise et efficace par éléments finis utilisant une technique matrix-free et un système multigrid expert est appliquée. Nos résultats présentent les déplacements des particules solide et fluide en surface et en profondeur du massif. Les temps d'arrivée des ondes volumiques et surfacique sont étudiés. En particulier, l'onde de compression de seconde espèce est mise en évidence. L'influence des différents couplages et plus spécifiquement l'influence de la perméabilité sur la réponse du sol est analysée.



Transient mechanical wave propagation in semi-infinite porous media using a finite element approach

A. Mesgouez*, G. Lefeuvre-Mesgouez, A. Chambarel

UMR A 1114 Climate, Soil and Environment, Faculté des Sciences, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse,
33 rue Louis Pasteur, F-84000 Avignon, France

Accepted 11 April 2005

Abstract

In this study, we propose a numerical investigation in the time domain of the mechanical wave propagation of an impulsional load on semi-infinite soil. The ground is modelled as a porous saturated viscoelastic medium involving complete Biot theory. All the couplings and a hysteretic Rayleigh damping are taken into consideration. An accurate and efficient finite element method using a matrix-free technique and an expert multigrid system are applied. Our results present the displacements of the fluid and solid particles over the surface and in depth. The arrival times of body and surface waves are studied. Particularly, the compressional wave of the second kind is highlighted. The influence of the different couplings and more specifically, the influence of the permeability on the response of the soil are analyzed.

© 2005 Published by Elsevier Ltd.

Keywords: Time domain; Wave propagation; Porous media; Finite element; Biot theory; Second compressional wave

1. Introduction

The study of the mechanical wave propagation in a transient regime in semi-infinite saturated porous soil is a problem of great importance in a large number of areas of applied mechanics and geomechanics ranging from earthquake engineering to soil vibrations or soil–structure interactions.

A saturated porous medium is a medium that presents on the microscopic spatial scale a solid part and a porous space filled with a viscous fluid. When we focus our attention on the description of such a medium, two approaches are possible. The first approach is situated at microscopic scale. In this configuration, the ‘solid elastic’ phase and the ‘compressible viscous fluid’ phase each constitute distinct geometric domains. A geometric point is found, at a given instant, in one of these two clearly identifiable phases. The second approach looks at the problem from the macroscopic level. The elementary volume is considered to be the superposition of two material particles occupying the same

geometric points at the same instants with different kinematics. Thus, the saturated porous medium is considered as a two-phase continuum: the skeleton particle is constituted by the solid matrix and the connected porous space, and the fluid particle is formed from the fluid saturating this connected porous space.

The change of microscopic–macroscopic scale has been notably studied by Auriault [1], Burridge and Keller [2], Terada et al. [3] and by Coussy et al. [4]. These authors study the solid–fluid mixture. Approaching the problem from the scale of the pore, they formulate the mechanical equations relevant to each phase and the mechanical equations relevant to the couplings of the mixture. Homogenization is then obtained through asymptotic developments or mathematical averaging procedures.

Biot’s equations which macroscopically govern the two-phase coupled porous medium are chronologically anterior to previous studies and have been subsequently justified. The macroscopic coefficients take their physical meaning in part from the microscopic characteristics of the medium. Biot’s two articles [5,6] are works of reference for mechanical wave propagation theory. The two articles of 1962 [7,8] aim towards a more general reformulation of previous studies including anisotropy, viscoelasticity and internal dissipation of the medium. Zienkiewicz et al. [9]

* Corresponding author. Fax: +33 490 843 815.

E-mail address: arnaud.mesgouez@univ-avignon.fr (A. Mesgouez).

focus on the peripheral cases of Biot's model for drained and undrained soil or in the quasi-static case. The different internal physical damping of the soil corresponding with the viscoelastic character of the skeleton particle are synthesized by Lefeuve-Mesgouez [10].

Different kinds of body waves exist in a porous medium: two compressional waves and a shear wave S . The first compressional wave $P1$ is a wave said to be quick whereas the second compressional wave $P2$ is said to be slow and attenuated. Additionally, should the medium present a free surface, a Rayleigh surface wave R will appear.

The validity of Biot's model and especially the experimental observation of the $P2$ wave have been obtained by Plona [11] and Berryman [12].

In the transient regime specialist area, Ghaboussi and Wilson [13] are the first to propose a numerical approach using finite elements based on Biot's model. However, this research does not take the notion of tortuosity into account, it artificially introduces a structural damping and gives a few results in 1D. Prevost [14] also presents theoretically and then numerically some 1D and 2D results, essentially in the quasi-static case. Afterwards, Zienkiewicz and Shiomi [15] present synthetically a finite element formulation $\{u, p, U\}$ of Biot's equations without tortuosity. Three formulations are studied and compared: first, an exact formulation $\{u, U\}$ for a compressible fluid; second, an approximate formulation $\{u, U\}$ for an incompressible fluid, for which the pressure term is approached using the Penalty Method; and finally an approximate formulation $\{u, p\}$ for which the fluid acceleration term is neglected. The authors underscore the large numerical oscillations for the exact formulation $\{u, U\}$ in 2D which can be reduced through the artificial introduction of a numerical damping.

Simon et al. [16,17] present a summary work on the diverse existing finite element formulations and the different techniques of time resolution. Their objective is to study the precision of the results by comparing these approaches to a theoretical approach presented in [18]. The study is carried out in 1D, using a hypothesis of dynamic compatibility and the Biot model is still without tortuosity.

In the case of an incompressible fluid and an incompressible solid, Gajo et al. [19] directly resolve the $\{u, p, U\}$ formulation. The authors essentially present their results in 1D and compare them with an analytical solution, as described in [20].

Other research such as that carried out by Hörlin et al. [21], Dauchez et al. [22,23], Atalla et al. [24] or Göransson [25] proposes finite element formulations in a permanent regime based on Biot's equations in $\{u-U\}$, $\{u-p\}$ or $\{u-\psi\}$ where ψ is a fluid potential.

In this article, we propose an accurate and efficient finite element $\{u-U\}$ formulation of Biot's equations in a transient regime. Thus, this time domain approach allows us to accede to a complementary understanding of the signal, for instance in the determination of the wave propagation celerities. The problem that we focus on here

concerns a two-dimensional saturated porous semi-infinite medium subjected to an impulsional excitation. Biot's equations are written in their complete, dimensionless form. All couplings (mass, inertial and elastic) are thereby taken into account. The finite element formulation includes a Rayleigh hysteretic viscoelastic damping. The objective of the article is to visualize the propagation of the different waves over the surface and in depth for the half-space in the time domain. Specifically, the $P2$ wave is given prominence. We analyze the influence of the couplings on the response of the displacements in the medium. To our knowledge, this particular approach has not been previously proposed.

2. Field equations

The macroscopic equations for dynamic isotropic saturated poroelasticity for small strains in a Lagrangian description were first formulated by Biot [5,6]. Bourbié et al. [26] proposed a complete review of the Biot theory.

The first equation of motion for the global system without body force can be written as

$$\sigma_{ij,j} = (1 - \phi)\rho_s \ddot{u}_i + \phi\rho_f \ddot{U}_i \quad (1)$$

In the above equation, u_i and U_i , respectively, represent the displacement components of the skeleton particle and the fluid particle, σ_{ij} the total Cauchy stress tensor components, ϕ the porosity defined by the connected space where fluid flow occurs over the elementary volume and ρ_s and ρ_f respectively the densities of the solid grains and the fluid component. The subscripts $(\cdot)_i$ and the superscripts $(\cdot)$ each denote respectively spatial and time derivatives. The summation convention is applied.

A second equation of motion that corresponds with a generalized law of Darcy in transient regimes can be written in the following form

$$p_{,i} = -\frac{\phi}{K}(\dot{U}_i - \dot{u}_i) + \rho_f(a - 1)\ddot{u}_i - a\rho_f \ddot{U}_i \quad (2)$$

where p is the pore pressure in the fluid, K the hydraulic permeability coefficient defined by the absolute permeability coefficient over the dynamic viscosity of the fluid which represents the viscous coupling and a the tortuosity coefficient which represents the inertial coupling.

The two constitutive relationships between stress and strain can be written as follows

$$\sigma_{ij} = \lambda_{0v}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_v\varepsilon_{ij} - \beta p\delta_{ij} \quad (3)$$

$$-\phi(U_{k,k} - u_{k,k}) = \beta u_{k,k} + \frac{1}{M}p \quad (4)$$

in which M is the first Biot coefficient, β the second Biot coefficient representing the elastic coupling and δ_{ij} the Kronecker symbol; $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$ is the strain tensor component of the skeleton particle in the case of small deformations and $U_{i,i}$ the fluid dilatation. The Biot

coefficients are defined as $\beta = 1 - K_0/K_s$ and $1/M = (\beta - \phi)/K_s + \phi/K_f$ where K_0 , K_s , K_f , respectively, are the bulk moduli of the drained porous media, the solid grains and the fluid component.

The viscoelastic hysteretic Rayleigh damping can be summarized with the following operators

$$\begin{cases} \lambda_{0v} = \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \mu_v = \mu \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (5)$$

where η is a constant damping coefficient depending on the kind of soil; μ and λ_0 are the drained Lamé coefficients for the purely elastic equivalent porous medium.

In the two-dimensional case, Eqs. (1)–(4) establish a system of eight unknowns for eight equations, respectively in the 3D case, these equations establish a system of thirteen unknowns for 13 equations, and these can be solved with suitable boundary conditions and initial conditions.

The field equations are non-dimensionalized to present the problem in both a general and significant manner. In our study, we consider the three independent mechanical quantities μ , ρ_s and η . Thus, we define the different dimensionless terms of the previous equations in function of these quantities.

3. Finite element {u–U} formulation

A Galerkin approach is applied to the previous dimensionless field equations.

Algebraic manipulations on Eqs. (1) and (2) yield

$$a\sigma_{ij,j} + \phi p_{,i} = [a(1 - \phi)\rho_s + \phi(a - 1)\rho_f]\dot{v}_i - \frac{\phi^2}{K}(V_i - v_i) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho_f(a - 1)\sigma_{ij,j} - (1 - \phi)\rho_s p_{,i} &= \frac{(1 - \phi)\rho_s\phi}{K}(V_i - v_i) \\ &+ [\rho_f^2(a - 1)\phi + \rho_s\rho_f a(1 - \phi)]\dot{V}_i \end{aligned} \quad (7)$$

Moreover, introducing the solid and fluid particles' velocities, respectively, as $v_i = \dot{u}_i$ and $V_i = \dot{U}_i$, gives us a first order time differential system.

The weighted residual method with the Galerkin ponderation leads us to integral forms for the following set of scalar products defined in the vector space $V(f) = [0, T] \times \{ \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(\Omega), f \in H_1(\Omega) \}$ where T is the study time and (Ω) the study space.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a\sigma_{ij,j}\delta v_i d\Omega + \int_{\Omega} \phi p_{,i}\delta v_i d\Omega &= \int_{\Omega} [a(1 - \phi)\rho_s + \phi(a - 1)] \\ &\times \rho_f]\dot{v}_i\delta v_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{-\phi^2}{K}V_i\delta v_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{K}v_i\delta v_i d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_f(a - 1)\sigma_{ij,j}\delta V_i d\Omega - \int_{\Omega} (1 - \phi)\rho_s p_{,i}\delta V_i d\Omega \\ = \int_{\Omega} \frac{(1 - \phi)\rho_s\phi}{K}V_i\delta V_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{-(1 - \phi)\rho_s\phi}{K}v_i\delta V_i d\Omega \\ + \int_{\Omega} [\rho_f^2(a - 1)\phi + \rho_s\rho_f a(1 - \phi)]\dot{V}_i\delta V_i d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

The weak formulation is then transformed with Green's theorem that introduces the boundary conditions. The (Ω) space is discretized geometrically and is meshed with triangular or tetrahedral linear isoparametric elements, Dhatt and Touzot [27]. The usual analytical approximation schemes are used to spatially discretize the previous equations into which the constitutive viscoelastic relationships (Eqs. (3)–(5)) are incorporated.

Thus, we can write that

$$u_i \approx \langle n_u \rangle \{u_i\}^n, U_i \approx \langle n_U \rangle \{U_i\}^n, v_i \approx \langle n_v \rangle \{v_i\}^n, V_i \approx \langle n_V \rangle \{V_i\}^n$$

where $\langle n_u \rangle$, $\langle n_U \rangle$, $\langle n_v \rangle$, and $\langle n_V \rangle$ are Lagrangian polynomial bases and $\{u_i\}^n$, $\{U_i\}^n$, $\{v_i\}^n$ and $\{V_i\}^n$ the nodal values of the variables. The different shape functions are chosen identically. We introduce the following matrixes $[N]$, $[B]$, $[A]$, $[D]$, $[F]$, $[Unit]$ and $[I]$

$$[N] = \begin{bmatrix} \langle n \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle n \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle n \rangle \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \langle n_x \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle n_y \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle n_z \rangle \\ \langle n_y \rangle & \langle n_x \rangle & 0 \\ \langle n_z \rangle & 0 & \langle n_x \rangle \\ 0 & \langle n_z \rangle & \langle n_y \rangle \end{bmatrix} \text{ and } [A] = \begin{bmatrix} \langle n_x \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle n_y \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle n_z \rangle \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} (\lambda_0 - \beta M\phi + M\beta^2)[Unit] + 2\mu[I] & 0 \\ 0 & \mu[I] \end{bmatrix}$$

$$\text{and } [F] = \eta[D]$$

$$[Unit] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$[I]$ is the (3,3) identity matrix.

The following notations are then introduced for an (Ω_e) elementary space

$$[m_e] = \int_{\Omega_e} [N]^t [N] d\Omega_e$$

$$\begin{aligned}
[m_{se}] &= \int_{\Omega_e} (a(1-\phi)\rho_s + \phi(a-1)\rho_f)[N]^t[N]d\Omega_e \\
[m_{fe}] &= \int_{\Omega_e} (\rho_f^2(a-1)\phi + \rho_s\rho_f a(1-\phi))[N]^t[N]d\Omega_e \\
[k_{se}] &= \int_{\Omega_e} (a[B]^t[D][B] + \phi M(\phi-\beta)[A]^t[\text{Unit}][A])d\Omega_e \\
[k_{fe}] &= \int_{\Omega_e} \phi M((a-1)\beta\rho_f + (1-\phi)\rho_s)[A]^t[\text{Unit}][A]d\Omega_e \\
[k_{sfe}] &= \int_{\Omega_e} \phi M(\beta a - \phi)[A]^t[\text{Unit}][A]d\Omega_e \\
[k_{fse}] &= \int_{\Omega_e} (\rho_f(a-1)[B]^t[D][B] - (1-\phi)\rho_s M(\phi-\beta)[A]^t \\
&\quad \times [\text{Unit}][A])d\Omega_e \\
[c_{se}] &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\phi^2}{K} [N]^t[N] + a[B]^t[F][B] \right) d\Omega_e \\
[c_{fe}] &= \int_{\Omega_e} \frac{(1-\phi)\rho_s\phi}{K} [N]^t[N]d\Omega_e \\
[c_{sfe}] &= \int_{\Omega_e} -\frac{\phi^2}{K} [N]^t[N]d\Omega_e \\
[c_{fse}] &= \int_{\Omega_e} \left(-\frac{(1-\phi)\rho_s\phi}{K} [N]^t[N] + \rho_f(a-1)[B]^t[F][B] \right) d\Omega_e
\end{aligned}$$

The coupling blocks are $[k_{sfe}], [k_{fse}], [c_{se}], [c_{fe}], [c_{sfe}], [c_{fse}]$.

With the previous notations, the discrete system can be synthesized in the following form

$$\begin{aligned}
&\sum_e \langle \delta W_e \rangle \left\{ \begin{bmatrix} [m_e] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [m_e] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [m_{se}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [m_{fe}] \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \{ \dot{W}_e \} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -[m_e] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[m_e] \\ [k_{se}] & [k_{sfe}] & [c_{se}] & [c_{sfe}] \\ [k_{fse}] & [k_{fe}] & [c_{fse}] & [c_{fe}] \end{bmatrix} \{ W_e \} \right\} \\
&= \sum_e \langle \delta W_e \rangle \{ F_e \} \quad (10)
\end{aligned}$$

where $\{W_e\} = \langle \{u_i\}^n \{U_i\}^n \{v_i\}^n \{V_i\}^n \rangle^t$ is the elementary vector of the variables and $\{F_e\}$ the elementary vector of the load. This formulation allows us to obtain an approximation of the weak formulation in a finite dimension subspace of $V(f)$.

4. Numerical resolution

The global form is obtained by a standard assembling procedure [27] with suitable boundary conditions. The general formulation of the first order time differential system can be written with global values as

$$\left\{ \frac{dW_g}{dt} \right\} = [M_g]^{-1} \{ \Psi(W_g, t) \} \quad (11)$$

and the global residuum as

$$\{ \Psi(W_g, t) \} = \{ F_g \} - [K_g] \{ W_g \} \quad (12)$$

The time integration scheme implemented here is a backward difference method modified with an upward time parameter α , Crouzeix and Mignot [28]. The corresponding algorithm can be presented for the first order as follows

While $(t_n \leq t_{\max})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \Delta W_n^i \} = \Delta t_n [M_n^i]^{-1} \{ \Psi(W_n^i + \alpha \Delta W_n^{i-1}, t_n + \alpha \Delta t_n) \} \\ \{ W_n^{i+1} \} = \{ W_n^i \} + \{ \Delta W_n^i \} \\ i = 1, 2, \dots \text{until } ||\{ \Delta W_n^i \} - \{ \Delta W_n^{i-1} \}|| \leq \text{tolerance} \end{array} \right\}$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$$

End while

This method requires inner iterations for each time step until the tolerance criterium is reached. It can be used for a higher order.

We use efficient C++ Object Oriented Programming for the finite element code called Fast Adaptive Finite Element Modular Object (FAFEMO) [29]. The finite element code is organized in three classes, corresponding to the functional blocks of the finite element method's stages (Fig. 1): *element*, *elementary matrices* and *building-resolution* classes. Thus, three objects connected by a single heritage are constructed and form a solver. In practise, we obtain very low sized solvers (less than 1000 C++ lines). The advantages of this code must be highlighted: we use a matrix-free technique, consequently the mass matrix and the stiffness matrix are never built. The nodes of the elements are chosen as numerical quadrature points. As a result, the global mass matrix is diagonal. Its inversion is an easy procedure. On the whole, it permits us to obtain a high performance level for the CPU cost and the storage cost. Additionally, as the initial solution of each time step is close to the next, the number of iterations involved in the semi-implicit method is very low, two or three in practise. Chambarel and Ferry [30] compared this method with

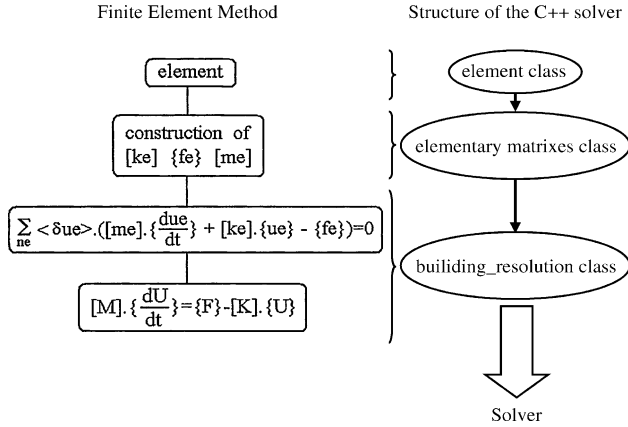


Fig. 1. Structure of the finite element code.

the fourth order Runge–Kutta algorithm: both methods give similar results. Moreover, an expert multigrid system, called AMS, is used to choose the unknown active degrees of freedom for the update of the solution. The size of the global vector of unknowns is then optimized. Physical considerations (highest wave celerity) and numerical considerations (security coefficient and comparative tests) are taken into account to build the AMS technique adapted to our case. The computational advantage consists of working with a small sized system even if the number of active degrees of freedom increases with time.

5. Numerical results

5.1. Positioning of the problem

In this section, we will present the displacements of the solid and fluid particles, over the surface and in depth, for a viscoelastic semi-infinite saturated porous medium, the physical characteristics of which are summarized in Table 1. These values have been chosen from a bibliographic review, Gajo et al. [19], Akbar et al. [31], Dvorkin and Nur [32], and are relative to a stiff ground. Then, all the values denoted by superscript * are dimensionless quantities. Reference length ($l_{\text{ref}}=19.5$ m) and time ($t_{\text{ref}}=0.01$ s) are deduced from the three independent mechanical quantities: $\mu=10^{10}$ Pa, $\rho_s=2600$ kg m⁻³ and $\eta=0.01$ s. Thus, in all the figures

presenting displacements versus time, scales should be multiplied by these values to obtain nominal results, for a given magnitude of the load.

Figure 2 presents the two-dimensional geometry. The mesh is chosen in relation with the points and duration studied. Dirichlet's conditions corresponding with the zero displacements for both phases are imposed at depth at the border of the medium. The time dependent solicitation is a vertical impulse of very short duration.

5.2. Study of two validation examples

5.2.1. Elastodynamic degenerated case

We have previously validated our work in elastodynamics by focusing on the case of a purely solid medium: porous soil is therefore seen as a solid viscoelastic one-phase medium. The fluid phase thus disappears and the different couplings cancel each other out. Numerically, the degeneration of the two-phase medium in this one-phase medium is translated by the cancellation of the coupling terms in the finite element formulation. The other blocks corresponding with the one fluid phase also cancel each other out through the intermediary of porosity.

Only three waves exist in elastodynamics: single compressional wave P, shear wave S and Rayleigh surface wave R. The speeds of these three waves are given by

$$c_P = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad c_S = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2},$$

$$c_R \cong \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} c_S \quad (13)$$

With the numerical values of the soil, it follows that

$$c_P = 2923 \text{ ms}^{-1}, \quad c_S = 1789 \text{ ms}^{-1}, \quad c_R = 1631 \text{ ms}^{-1}$$

and

$$c_P^* = 1.45, \quad c_S^* = 0.90, \quad c_R^* = 0.80$$

The wave arrival times for the observation points situated at a dimensionless distance $d^*=2$ from the source are

$$t_P^* = 1.35, \quad t_S^* = 2.20, \quad t_R^* = 2.45$$

Figures 3(a) and (b) present the vertical and horizontal surface displacements of the medium. The first conclusion

Table 1
Soil characteristics for a stiff ground

Young modulus of drained porous media E_0 (MPa)	Poisson ratio ν	Bulk modulus of solid grains K_s (MPa)
20,000	0.2	40,000
Bulk modulus of fluid component K_f (MPa)	First Biot coefficient M (MPa)	Second Biot coefficient β
2200	5270	0.72
Density of solid grains ρ_s (kg m ⁻³)	Density of fluid component ρ_f (kg m ⁻³)	Hydraulic permeability coefficient K (m ³ kg ⁻¹ s)
2600	1000	$10_e - 9 - 10_e - 7$
Porosity ϕ	Tortuosity coefficient a	Damping coefficient η (s)
0.4	1.2	0.0001

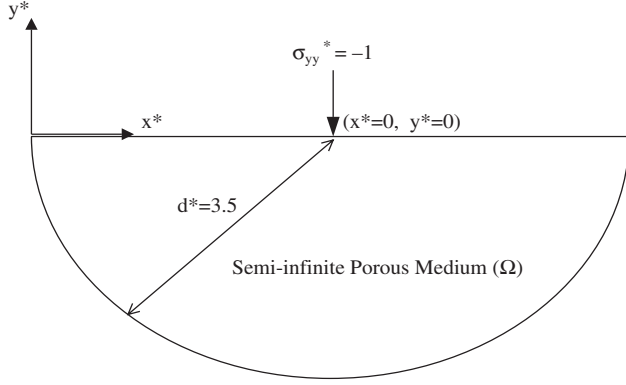


Fig. 2. Geometry of model.

that is imposed is that the fluid phase is non-existent with zero displacement and zero speed. The degeneration of our two-phase model into a one-phase model is therefore wholly satisfactory. The influence of the P compressional wave is clearly perceptible for both the vertical and horizontal displacements. As for the S shear wave, its influence is

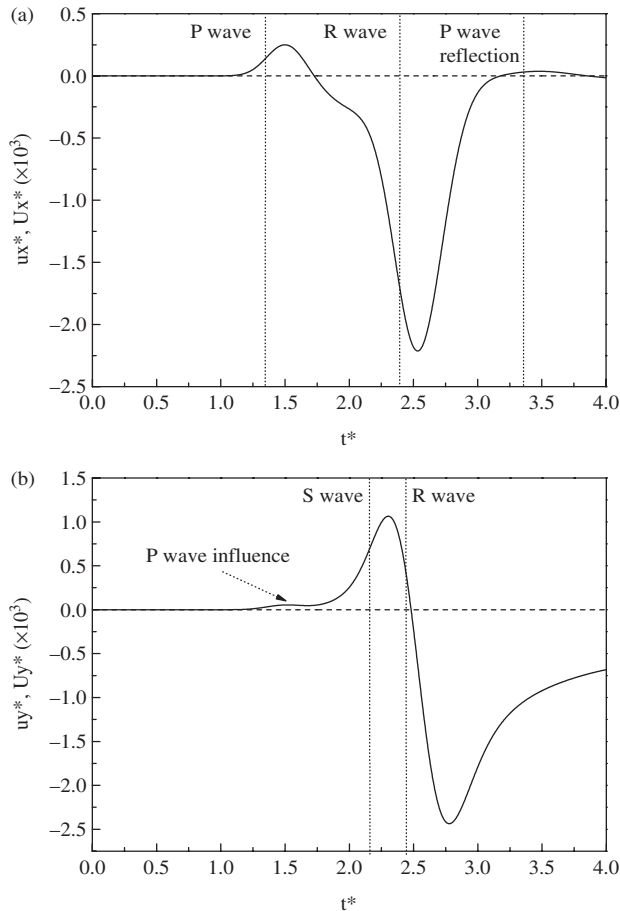


Fig. 3. Surface displacements in a degenerated elastodynamic case (a) horizontal solid (solid line) and fluid (dashed line) displacements. (b) vertical solid (solid line) and fluid (dashed line) displacements.

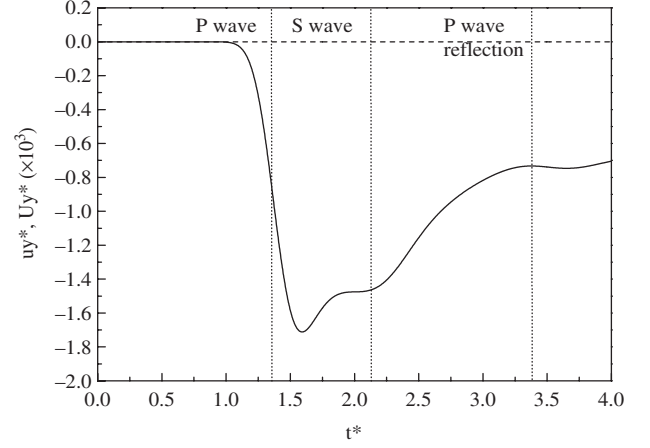


Fig. 4. In-depth vertical solid (solid line) and fluid (dashed line) displacements in a degenerated elastodynamic case.

clearly perceptible on the vertical displacement and finds itself mixed with the Rayleigh wave for the horizontal displacement, which generally prevents us from seeing it. The Rayleigh wave, preponderant on the surface, brings about an opposite contribution to that of the P and S waves and is very clearly seen for both displacements. When focusing on maximum contribution, results are in the expected order (R then S then P, [10]). Next, the displacements return to 0 after the waves have passed. The body waves are preponderant in depth, and therefore, the influence of the Rayleigh wave disappears, (Fig. 4). The influence of the S wave corresponds with the plateau that appears after the displacements due to P. Finally, the arrival times of the different waves are validated, on the surface just as in depth. The reflection at the border of the P wave, at $t^* = 3.3$, is to be brought to attention.

5.2.2. Poroelastic case with the dynamic compatibility hypothesis

To give a second validation example, we study the case of a specific porous medium with the dynamic compatibility hypothesis: in such a case, the first compressional wave propagates with no relative motion between solid and fluid phases, [5]. The one-dimensional study presented by Simon et al. [18] specifies that the medium's properties are chosen in such a way that

$$\beta \frac{M}{\lambda_0 + 2\mu + \beta^2 M} = \frac{\rho_f}{(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f} \quad (14)$$

The speed of the P1 wave is thus given by

$$c_{P1} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu + \beta^2 M}{(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f}} \quad (15)$$

First Biot coefficient M is chosen to be the dependent parameter, and no tortuosity is taken into account. With the numerical values of the soil, the first compressional wave

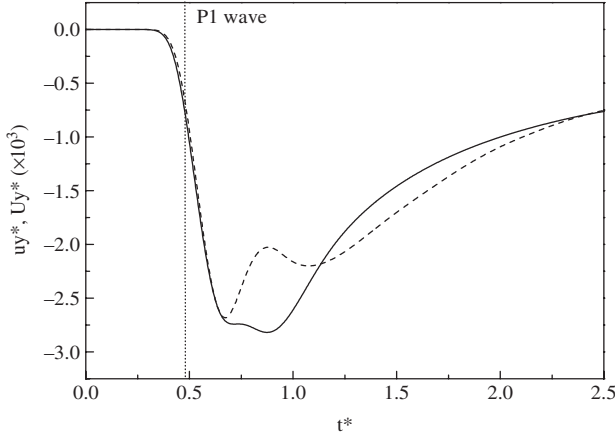


Fig. 5. In-depth vertical solid (solid line) and fluid (dashed line) displacements for a porous medium with the dynamic compatibility hypothesis.

speed and its arrival time at the point located at the dimensionless distance of 1 under the load are

$$c_{P1} = 4238 \text{ ms}^{-1}, \quad c_{P1}^* = 2.20, \quad t_{P1}^* = 0.45$$

Figure 5 shows the fluid and solid vertical displacements of this specific porous medium. The fluid and solid phases present the same behaviour with regard to the P1 wave. No relative motion occurs. The differentiation between the two phases appears afterwards: then fluid and solid particles each have their own displacements.

5.3. Study of the general porous case and the viscous coupling's influence on the response of the half-space

The viscous coupling plays a preponderant role in the response of the soil; it translates the ease of decoupling of the two phases' movement. We will study the influence of the permeability that traduces this viscous coupling. The following two examples illustrate this analysis, Fig. 6(a) and (b) for a strong viscous coupling (weak permeability, $K^* = 0.013$), and Fig. 7(a) and (b) for a weak viscous coupling (strong permeability, $K^* = 0.26$).

In both cases, the arrival times are in agreement with the values obtained by Coussy [33] in a more restrictive framework.

With the numerical values of our soil, there follows that

$$c_{P1} = 3771 \text{ ms}^{-1}, \quad c_S = 2263 \text{ ms}^{-1}, \quad c_{P2} = 1299 \text{ ms}^{-1}$$

and

$$c_{P1}^* = 1.90, \quad c_s^* = 1.15, \quad c_{P2}^* = 0.65$$

These values correspond to the limit values of the dispersion curves given in Fig. 8(a) and (b), which are obtained by a similar technique as the one developed by Degrande et al. [34]. The following remarks can be done: in

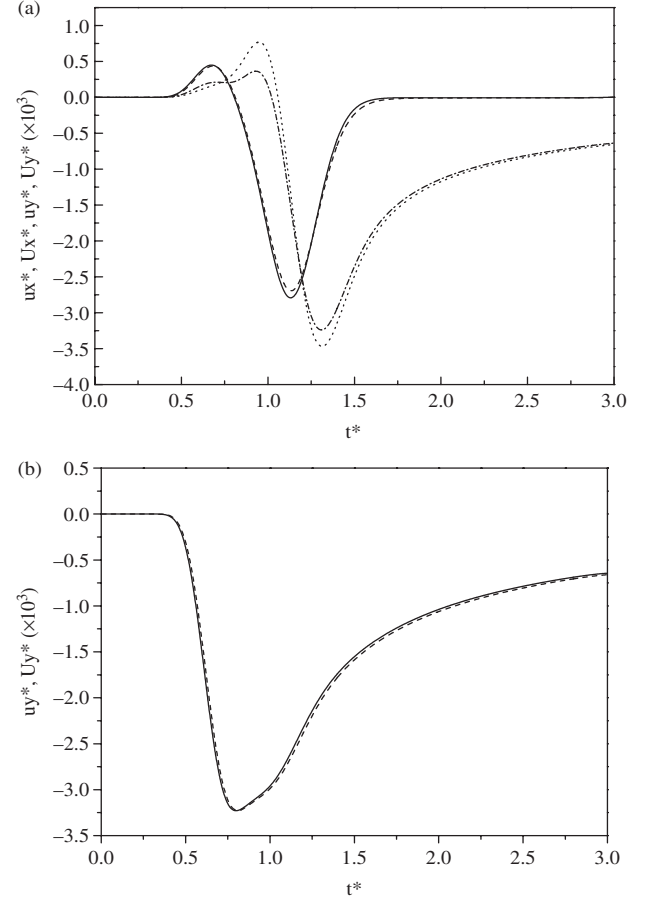


Fig. 6. Surface and in-depth displacements for a high viscous coupling (a) surface horizontal solid (solid line), horizontal fluid (dashed line), vertical solid (dotted line) and vertical fluid (dash-dotted line) displacements. (b) in-depth vertical solid (solid line) and vertical fluid (dashed line) displacements. (Observation point $d^* = 1$).

both cases, the P1 and S waves are not very dispersive; the P2 wave is more dispersive and attenuated. Moreover, as permeability is lower, the dispersive behaviour and the attenuation of the P2 wave are emphasized.

The arrival times for the observation points located at the respective dimensionless distances of 1 and 1.5 are

$$t_{P1}^* = 0.50, \quad t_S^* = 0.85, \quad t_{P2}^* = 1.55; \\ t_{P1}^* = 0.80, \quad t_S^* = 1.30, \quad t_{P2}^* = 2.30$$

On the first curves, (Fig. 6(a) and (b)), the strong viscous coupling leads to an almost monophasic behaviour whereas for the weak viscous coupling, (Fig. 7(a) and (b)), we see a very clear difference in the response between the displacements of the fluid phase and that of the solid phase. These differences can be noted just as clearly with regard to the amplitude of the fluid displacements as with regard to their general appearance: the appearance is spaced further apart in time when

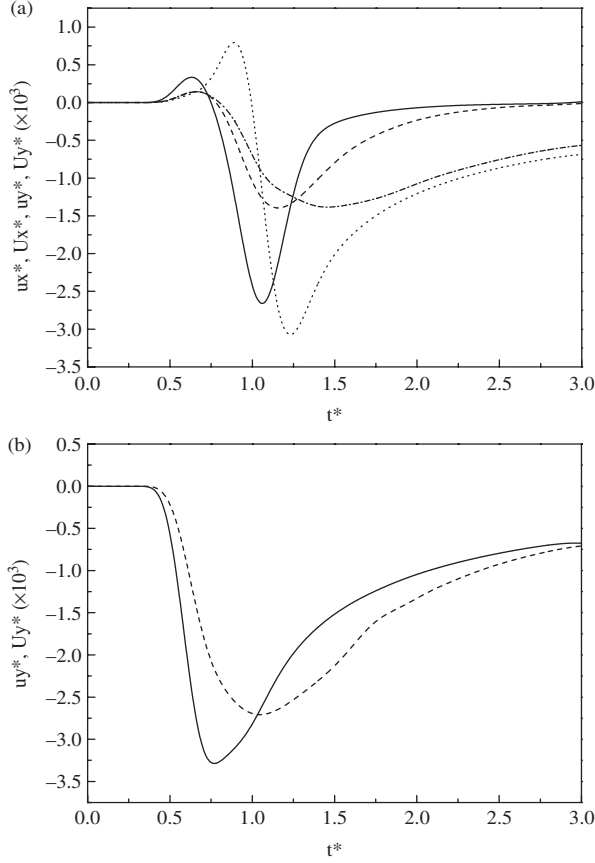


Fig. 7. Surface and in-depth displacements for a low viscous coupling (a) surface horizontal solid (solid line), horizontal fluid (dashed line), vertical solid (dotted line) and vertical fluid (dash-dotted line) displacements. (b) in-depth vertical solid (solid line) and vertical fluid (dashed line) displacements. (Observation point $d^* = 1$).

permeability is strong, this illustrates the flow of the fluid phase. The fluid ‘prefers’ flow to deformation.

The calculus of the characteristic frequency also illustrates the different behaviours of porous media. It is defined as

$$f_c^* = \frac{\phi}{2\pi\rho_f^* K^*} \quad (16)$$

When considering harmonic regimes (frequency f^*), ratio f^*/f_c^* is usually introduced and is thus proportional to permeability. For a low ratio, only one compressional wave propagates in the medium because the compressional wave of the second kind presents very low celerity and very high attenuation. In this case, the medium tends towards a monophasic saturated solid. On the contrary, for a high ratio, the two compressional waves propagate in the medium and are attenuated: the medium presents a biphasic behaviour [5,26].

For transient regimes, the solicitation frequency range is determined using a Fourier transform. In the case of

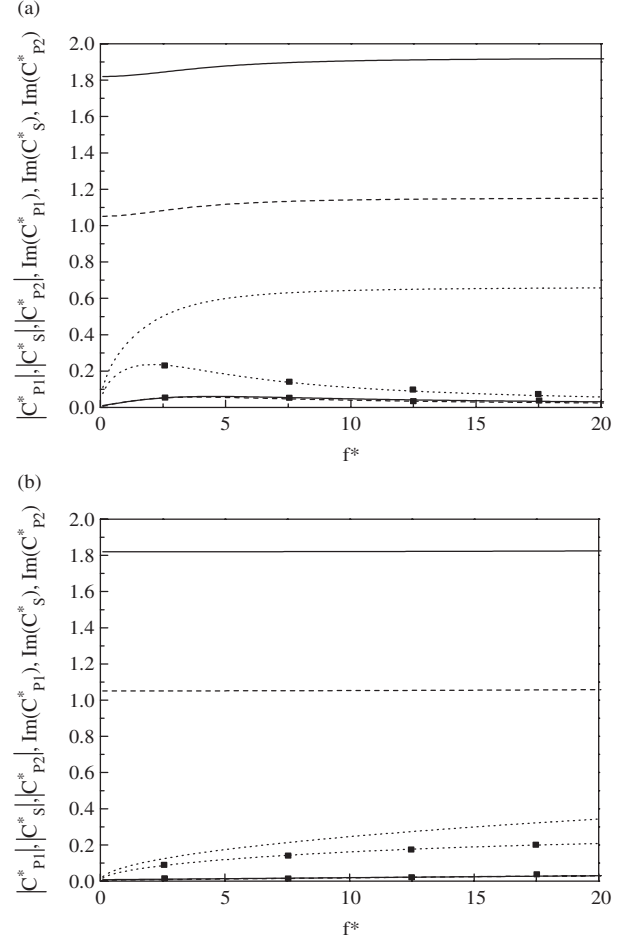


Fig. 8. Dispersion and attenuation curves for (a) a low viscous coupling (b) a high viscous coupling: speed modulus (no symbol) and imaginary part (rectangular symbol) for P1 (solid line), S (dashed line) and P2 (dotted line) waves.

the pulse studied, the cardinal sine’s preponderant dimensionless frequencies are below 10. For the two previous viscous couplings, the characteristic frequencies are respectively equal to 12.7 and 0.6. Thus, comparing the frequency range with these values, Figs. 6(a) and (b) and 7(a) and (b) respectively confirm the monophasic and biphasic behaviours.

Figure 9 focuses on the fluid flow depending on permeability, through visualisation of the fluid displacement in depth under the load, for distance $d^* = 1.5$. Our previous conclusions are thereby confirmed.

Another consequence of the viscous coupling is the modification of the fluid phase displacement as regards to the shear wave. Figure 10 therefore connects the transversal displacement of the fluid phase to the values of permeability. We see that the fluid which does not transmit the effort of shearing, deforms upon the arrival of this wave because of the high viscous coupling. On the contrary, with strong permeability, the fluid no longer

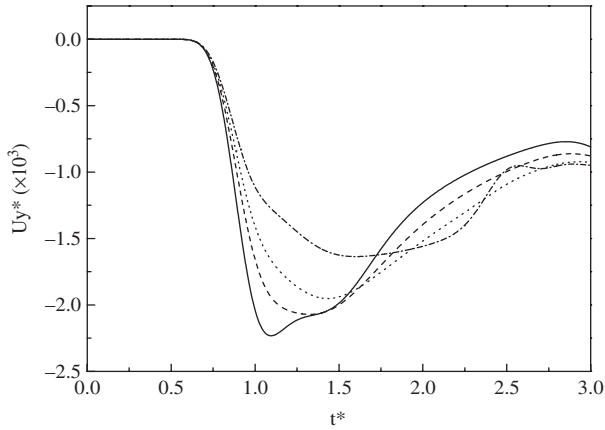


Fig. 9. Fluid flow function of viscous coupling with vertical fluid displacement for $K^*=0.026$ (solid line), $K^*=0.13$ (dashed line), $K^*=0.26$ (dotted line) and $K^*=0.65$ (dash-dotted line). (Observation point $d^*=1.5$).

responds to the S wave, conforming with its intrinsic nature.

The general appearance of the previous curves underlines the spread in time of the wave front. This is explained by:

- the solid skeleton's viscoelastic nature and the fluid's viscous character,
- the dispersive character of wave propagation,
- the numerical nature of the pulse and its associated time discretization.

5.4. Visualisation of the P2 wave

The P2 wave is not visually perceptible whatever the physical parameters of the soil; even if the wave exists in all cases, it can be visualised only if it transports sufficient energy to generate a minimal perceptible deformation, that is non-damped quasi-instantaneously. This is why we have not systematically seen the wave on previous occasions.

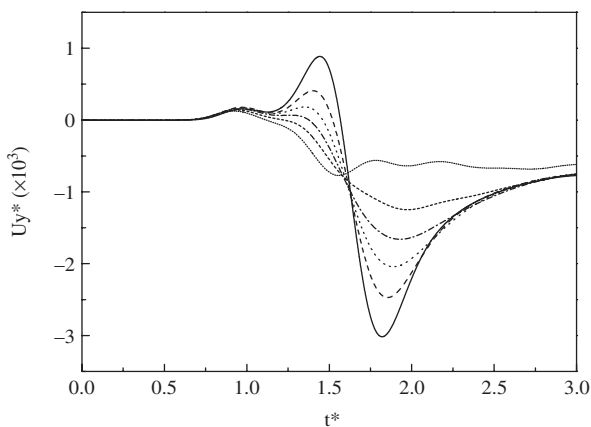


Fig. 10. Shear wave in the fluid phase, at $(x^*=1, y^*=0)$, function of viscous coupling for $K^*=0.0026$ (solid line), $K^*=0.026$ (dashed line), $K^*=0.065$ (dotted line), $K^*=0.13$ (dash-dotted line), $K^*=0.26$ (short dashed line) and $K^*=0.65$ (short dotted line).

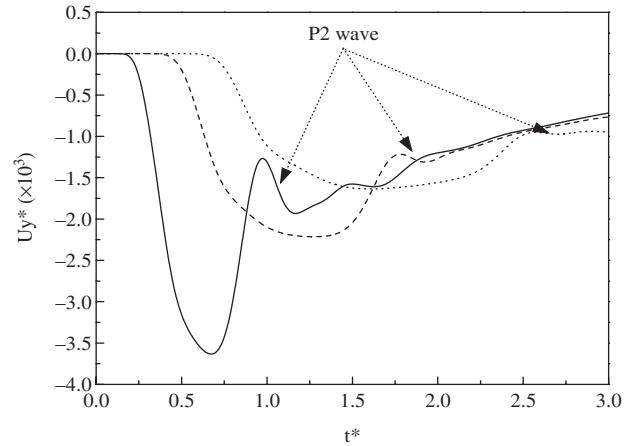


Fig. 11. Visualisation of P2 wave for three dimensionless distances $d^*=0.5$ (solid line), $d^*=1.0$ (dashed line) and $d^*=1.5$ (dotted line).

Permeability and porosity values have been chosen relatively high (and the tortuosity value low) to emphasize the P2 wave: in fact, the couplings have to be weak to clearly decouple the two phases. Figure 11 allows us to see the second compressional wave through the fluid displacement.

We observe the response for different depths to free ourselves from the influence of the Rayleigh wave. The observation points are close, therefore limiting the geometric attenuation. P2 generates a longitudinal deformation in the same direction as P1. The arrival times of P2 for the different distances are well estimated in so far as this wave is of a dispersive character. In addition, it appears that the longitudinal deformation is of smaller amplitude for the P2 wave than for P1.

Figure 12 illustrates the influence of the viscous coupling on the visualisation of the P2 wave. The weaker the coupling, the more P2 generates a perceptible longitudinal deformation, according to the trend of the dispersion and attenuation curves presented in Fig. 8(a) and (b).

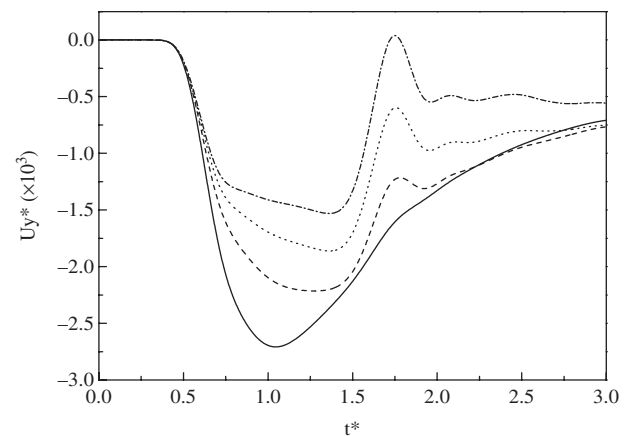


Fig. 12. Influence of viscous coupling on P2 wave, at $(x^*=0, y^*=-1)$, for $K^*=2.6$ (dash-dotted line), $K^*=1.3$ (dotted line), $K^*=0.65$ (dashed line) and $K^*=0.26$ (solid line).

Consequently, the importance of this wave reflects a high permeability of the ground.

6. Conclusions

In this paper, we have taken a numerical approach to the study of wave propagation in porous saturated media. An accurate and efficient finite element method using a matrix-free technique and an expert multigrid system has been developed to treat Biot complete equations. Moreover, a hysteretic Rayleigh damping has been taken into account. Our results have dealt with the solid and fluid displacements over the surface and in depth for semi-infinite media. The different body and surface waves have been analyzed, with particular attention being paid to the second compressional wave. Further research will include an extension of this work to study three-dimensional geometries and more complex media combining different types of soils. To this aim, a parallelization of the code is under study. The ultimate purpose of this research is to deduce some soil characteristics from the analysis of the signal.

References

- [1] Auriault JL. Dynamic behaviour of a porous medium saturated by a newtonian fluid. *Int J Eng Sci* 1980;18(6):775–85.
- [2] Burridge R, Keller JB. Poroelasticity equations derived from microstructure. *J Acoust Soc Am* 1981;70(4):1140–6.
- [3] Terada K, Ito T, Kikuchi N. Characterization of the mechanical behaviors of solid–fluid mixture by the homogenization method. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1998;153(3–4):223–57.
- [4] Coussy O, Dormieux L, Detournay E. From Mixture theory to Biot's approach for porous media. *Int J Solids Struct* 1998;35(34–35):4619–35.
- [5] Biot MA. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I—Low-frequency range. *J Acoust Soc Am* 1956;28(2):168–78.
- [6] Biot MA. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II—Higher frequency range. *J Acoust Soc Am* 1956;28(2):179–91.
- [7] Biot MA. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *J Acoust Soc Am* 1962;34(9):1254–64.
- [8] Biot MA. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J Appl Phys* 1962;33(4):1482–98.
- [9] Zienkiewicz OC, Chang CT, Bettess P. Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils. *Géotechnique* 1980;30(4):385–95.
- [10] Lefeuvre-Mesgouez G. Propagation d'ondes dans un massif soumis à des charges se déplaçant à vitesse constante. PhD Thesis, Université de Nantes, France; 1999.
- [11] Plona TJ. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. *Appl Phys Lett* 1980;36(4):259–61.
- [12] Berryman JG. Confirmation of Biot's theory. *Appl Phys Lett* 1980;37(4):382–4.
- [13] Ghaboussi J, Wilson L. Variational formulation of dynamics of fluid-saturated porous elastic solids. *J Eng Mech Div Proc Am Soc Civil Eng* 1972;98(EM4):947–62.
- [14] Prevost JH. Nonlinear transient phenomena in saturated porous media. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1982;30(1):3–18.
- [15] Zienkiewicz OC, Shiomi T. Dynamic behaviour of saturated porous media: the generalized Biot formulation and its numerical solution. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 1984;8:71–96.
- [16] Simon BR, Wu JSS, Zienkiewicz OC, Paul DK. Evaluation of u-w and u- π finite element methods for the dynamic response of saturated porous media using one-dimensional models. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 1986;10:461–82.
- [17] Simon BR, Wu JSS, Zienkiewicz OC. Evaluation of higher order, mixed and hermitean finite element procedures for dynamic analysis of saturated porous media using one-dimensional models. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 1986;10:483–99.
- [18] Simon BR, Zienkiewicz OC, Paul DK. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 1984;8:381–98.
- [19] Gajo A, Saetta A, Vitaliani R. Evaluation of three and two field finite element methods for the dynamic response of saturated soil. *Int J Numer Methods Eng* 1994;37:1231–47.
- [20] Gajo A, Mongiovi L. An analytical solution for the transient response of saturated linear elastic porous media. *Int J Numer Anal methods Geomech* 1995;19:399–413.
- [21] Hörlin NE, Nordström M, Göransson P. A 3D hierarchical FE formulation of Biot's equation for elasto-acoustic modelling of porous media. *J Sound Vib* 2001;254(4):633–52.
- [22] Dauchez N. Etude vibroacoustique des matériaux poreux par éléments finis. PhD Thesis, Université du Maine, France; 1999.
- [23] Dauchez N, Sahraoui S, Atalla N. Investigation and modelling of damping in a plate with bonded porous layer. *J Sound Vib* 2003;265(2):437–49.
- [24] Atalla N, Panneton R, Debergue P. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *J Acoust Soc Am* 1998;104(3):1444–52.
- [25] Göransson P. A 3-D, symmetric, finite element formulation of the biot equations with application to acoustic wave propagation through an elastic porous medium. *Int J Numer Methods Eng* 1998;41:167–92.
- [26] Bourbié T, Coussy O, Zinszner R. *Acoustique des milieux poreux*. Paris: Editions Technip; 1986.
- [27] Dhett G, Touzot G. Une présentation de la méthode des Eléments Finis. Paris: Editions Maloine S.A.; 1981.
- [28] Crouzeix M, Mignot AL. *Analyse numérique des équations différentielles*. Paris: Editions Masson; 1997.
- [29] Chambarel A, Onuphre E. Parallel computation of an unsteady compressible flow. *Lect Notes Comput Sci* 1997;1227:377–82.
- [30] Chambarel A, Ferry E. Finite Element formulation for Maxwell's equations with space dependent electric properties. *Revue Européenne des Eléments Finis* 2000;9(8):941–67.
- [31] Akbar N, Dvorkin J, Nur A. Relating P-wave attenuation to permeability. *Geophysics* 1993;58(1):20–9.
- [32] Dvorkin J, Nur A. Dynamic poroelasticity: a unified model with the squirt and the Biot mechanisms. *Geophysics* 1993;58(4):524–33.
- [33] Coussy O. *Mécanique des milieux poreux*. Paris: Editions Technip; 1991.
- [34] Degrande G, De Roeck G, Van Den Broeck P, Smeulders D. Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media. *Int J Solids Struct* 1998;35(34–35):4753–78.

4.3 Numerical approach of Biot's equations for transient regimes : study of mechanical couplings in *Eurodyn 2005*

RÉSUMÉ

Les auteurs proposent une approche numérique des équations complètes de Biot afin d'étudier la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux saturé viscoélastique. Une formulation éléments finis est développée afin d'étudier les déplacements fluide et solide, en surface et en profondeur du massif, générés par une impulsion appliquée en surface du massif semi-infini. Les couplages élastique, inertiel et visqueux et un amortissement hystérétique de Rayleigh sont pris en considération. Les résultats temporels présentés se concentrent sur l'influence des différents couplages. En particulier, nous verrons que les principales caractéristiques de la phase fluide dépendent fortement de ceux-ci.

Numerical approach of Biot's equations for transient regimes: study of mechanical couplings

A. Mesgouez, G. Lefeuvre-Mesgouez & A. Chambarel

UMR A 1114 Climate, Soil and Environment, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, France

ABSTRACT: The authors propose a numerical approach of complete Biot's equations to study the mechanical wave propagation in saturated viscoelastic porous media. A Finite Element approach is developed to study the displacements over and within the ground for the solid and fluid particles induced by an impulsional load on the surface of a semi-infinite soil. Elastic, inertial and viscous couplings and a hysteretic Rayleigh damping are taken into account. The time domain results presented focus on the influence of the different couplings. In particular, we will see that the main features of the fluid phase depend strongly on them.

1 INTRODUCTION

The Laboratory of Climate, Soil and Environment has worked for several years on wave propagation in porous media, including the study of electromagnetic and mechanical waves. Actually, the study of the mechanical wave propagation in porous media is a thematic of great interest in a large number of diverse fields such as soil vibrations, environmental and earthquake engineering.

Biot (1962) was the first to study saturated porous media. Bourbié et al. (1987) have proposed a complete review of the Biot theory underlining three different couplings between the two phases: elastic, inertial and viscous couplings. The medium is modelled as a two-phase continuum composed of a porous deformable viscoelastic solid skeleton and a fluid component corresponding to the viscous fluid which saturates the porous space. In such a medium, three body waves exist: the $P1$ and $P2$ compressional waves and the S shear wave. Moreover, for a semi-infinite medium, a surface wave also exists denoted as the Rayleigh R wave.

In the case of a transient regime, numerical researches on Biot's equations have been done in the 80's-90's: Zienkiewicz and Shiomi (1984), Simon et al. (1986) and Gajo et al. (1994). These works are restricted to specific cases and they do not take into account the global theory. More recently, numerical works have particularly dealt with harmonic regimes: Atalla et al. (1998) and Hörlin et al. (2001) for instance.

The authors propose here a numerical investiga-

tion of complete Biot's equations, including all the couplings, by a Finite Element Method in the case of transient regimes. Results presented focus on the influence of the three different couplings for a two-dimensional semi-infinite geometry.

2 THEORETICAL AND NUMERICAL APPROACHES

2.1 Governing equations

Material properties of the ground are: λ_0 and μ (drained Lamé constants for the purely elastic equivalent porous media), ρ_s and ρ_f (solid grains and fluid densities), ϕ (porosity), K (hydraulic permeability), a (tortuosity), M and β (Biot coefficients). The equation field is nondimensionalized to present the problem in a general and meaningful manner.

The first equation of motion for the global system in the absence of body forces can be written

$$\sigma_{ij,j} = (1 - \phi)\rho_s\ddot{u}_i + \phi\rho_f\ddot{U}_i \quad (1)$$

in which u_i and U_i are respectively the displacement components of the skeleton and fluid particles, σ_{ij} the total Cauchy stress tensor components. The subscripts $(\cdot)_{,i}$ and the superscripts $(\cdot)$ each denote spatial and time derivatives. The summation convention is applied. The second equation of motion corresponding to a generalized law of Darcy in transient regimes can

be written in the following form

$$p_{,i} = -\frac{\phi}{K}(\dot{U}_i - \dot{u}_i) + \rho_f(a-1)\ddot{u}_i - a\rho_f\ddot{U}_i \quad (2)$$

where p is the pore pressure in the fluid.

The two constitutive relationships between stresses and strains can be written as follows

$$\sigma_{ij} = \lambda_{0v}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_v\varepsilon_{ij} - \beta p\delta_{ij} \quad (3)$$

$$-\phi(U_{k,k} - u_{k,k}) = \beta u_{k,k} + \frac{1}{M}p \quad (4)$$

where a viscoelastic hysteretic Rayleigh damping is taken into account (damping coefficient: η) with the following operators

$$\begin{cases} \lambda_{0v} = \lambda_0(1 + \eta\frac{\partial}{\partial t}) \\ \mu_v = \mu(1 + \eta\frac{\partial}{\partial t}) \end{cases} \quad (5)$$

2.2 Finite Element Method

The introduction of the solid and fluid particles' velocities ($v_i = \dot{u}_i$ and $V_i = \dot{U}_i$) and some algebraic operations lead to a first order time differential system. The weighted residual method with the Galerkin ponderation yields integral forms (6) and (7) defined in the vector space $V(f) = [0, T] \times \{\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(\Omega), f \in H_1(\Omega)\}$ where T is the study time and (Ω) the study space.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a\sigma_{ij,j}\delta v_i d\Omega + \int_{\Omega} \phi p_{,i}\delta v_i d\Omega = \\ \int_{\Omega} [a(1-\phi)\rho_s + \phi(a-1)\rho_f] \dot{v}_i\delta v_i d\Omega + \\ \int_{\Omega} \frac{-\phi^2}{K} V_i\delta v_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{K} v_i\delta v_i d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_f(a-1)\sigma_{ij,j}\delta V_i d\Omega - \int_{\Omega} (1-\phi)\rho_s p_{,i}\delta V_i d\Omega = \\ \int_{\Omega} \frac{(1-\phi)\rho_s\phi}{K} V_i\delta V_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{-(1-\phi)\rho_s\phi}{K} v_i\delta V_i d\Omega + \\ \int_{\Omega} [\rho_f^2(a-1)\phi + \rho_s\rho_f a(1-\phi)] \dot{V}_i\delta V_i d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

Then, for respectively two-dimensional and three-dimensional problems, triangular and tetrahedral linear isoparametric elements are used to mesh the (Ω) space. Afterwards, a usual analytical discretization is applied to the previous equations in which constitutive viscoelastic relationships (3) and (4) are incorporated.

The discrete system can be synthesized for an elementary space (subscript $()_e$) in the following form

$$\begin{aligned} \sum_e \langle \delta W_e \rangle \left\{ \begin{bmatrix} [m_e] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [m_e] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [m_{se}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [m_{fe}] \end{bmatrix} \{W_e\} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -[m_e] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[m_e] \\ [k_{se}] & [k_{sfe}] & [c_{se}] & -[c_{se}] \\ [k_{fse}] & [k_{fe}] & [c_{fe}] & -[c_{fe}] \end{bmatrix} \{W_e\} \right\} \\ = \sum_e \langle \delta W_e \rangle \{F_e\} \end{aligned} \quad (8)$$

where $\{W_e\} = \langle \{u_i\}^n \{U_i\}^n \{v_i\}^n \{V_i\}^n \rangle^t$ is the elementary vector of the variables and $\{F_e\}$ the elementary vector of the load. The elementary block matrices appearing in (8) are defined as

- $[m_e] = \int_{\Omega_e} [N]^t [N] d\Omega_e$
- $[m_{se}] = \int_{\Omega_e} (a(1-\phi)\rho_s + \phi(a-1)\rho_f) [N]^t [N] d\Omega_e$
- $[m_{fe}] = \int_{\Omega_e} (\rho_f^2(a-1)\phi + \rho_s\rho_f a(1-\phi)) [N]^t [N] d\Omega_e$
- $[k_{se}] = \int_{\Omega_e} a[B]^t [D][B] + \phi M(\phi - \beta) [A]^t [Unit][A] d\Omega_e$
- $[k_{fe}] = \int_{\Omega_e} \phi M((a-1)\beta\rho_f + (1-\phi)\rho_s) [A]^t [Unit][A] d\Omega_e$
- $[k_{sfe}] = \int_{\Omega_e} \phi M(\beta a - \phi) [A]^t [Unit][A] d\Omega_e$
- $[k_{fse}] = \int_{\Omega_e} \rho_f(a-1)[B]^t [D][B] - (1-\phi)\rho_s M(\phi - \beta) [A]^t [Unit][A] d\Omega_e$
- $[c_{se}] = \int_{\Omega_e} \frac{\phi^2}{K} [N]^t [N] d\Omega_e$
- $[c_{fe}] = \int_{\Omega_e} -\frac{(1-\phi)\rho_s\phi}{K} [N]^t [N] d\Omega_e$

where $[N]$ is the matrix of the shape functions; $[A]$ and $[B]$ are relative to the spatial derivatives of the shape functions; $[D]$ and $[F]$ are relative to the behaviour laws. The coupling blocks are $[k_{fse}]$, $[k_{sfe}]$, $[c_{se}]$, $[c_{fe}]$.

2.3 Numerical procedure

Applying a standard assembling procedure, Dhatt and Touzot (1981), the general formulation of the first order time differential system and the global residuum Ψ can be synthesized as

$$\left\{ \frac{dW_g}{dt} \right\} = [M]^{-1} \{ \Psi(W_g, t) \} \quad (9)$$

$$\{\Psi(W_g, t)\} = \{F_g\} - [K]\{W_g\} \quad (10)$$

with subscript $()_g$ standing for global values.

The time integration algorithm is a backward difference method modified with an upward time parameter α and is presented as follows for a k order

While($t_n \leq t_{max}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\Delta W_n^i\} = \Delta t_n \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j [M_{n-j}^i]^{-1} \times \\ \{\Psi_{n-j}(\{W_{n-j}\} + \alpha_j \{\Delta W_{n-j}^{i-1}\}, t_n + \alpha_j \Delta t_n)\} \\ i = 1, 2, \dots \\ \text{until } \|\{\Delta W_n^i\} - \{\Delta W_n^{i-1}\}\| \leq \text{tolerance} \end{array} \right\}$$

$\{W_{n+1}\} = \{W_n\} + \{\Delta W_n\}$
 $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$
 end while

It requires inner iterations for each time step until the tolerance criterium (11) is reached.

$$\alpha \Delta t \left\| \frac{\partial}{\partial W} \{[M]^{-1} \Psi(W, t)\} \right\| < 1 \text{ let } \Delta t < \Delta t_0 \quad (11)$$

If $\alpha < 0.5$, a CFL condition is also required and these two conditions have to be respected.

We use efficient C++ Object-Oriented Programming for the Finite Element code called FAFEMO, standing for Fast Adaptative Finite Element Modular Object, developed by Chambarel and Ferry (2000). Several advantages must be underlined :

- the mass and stiffness matrices are never built because a matrix free technique is used;
- the global mass matrix is diagonal because the nodes of the elements are chosen as numerical quadrature points: consequently, its inversion is an easy process;
- an expert multigrid system, called AMS, is used to choose the unknown active degrees of freedom for the update of the solution. The size of the global vector of unknowns is then optimized.

On the whole, a high performance level is obtained both in terms of CPU and storage costs.

3 NUMERICAL RESULTS

3.1 Two-dimensional geometry

Table 1. Soil characteristics.

λ_0 (MPa)	μ (MPa)	K_s (MPa)	K_f (MPa)
5 560	8 330	40 000	2 200
M (MPa)	β	ρ_s (kg m ⁻³)	ρ_f (kg m ⁻³)
5 270	0.72	2600	1000
a	K (m ³ kg ⁻¹ s)	ϕ	η (s)
1.5	10 ⁻⁷	0.4	0.0001

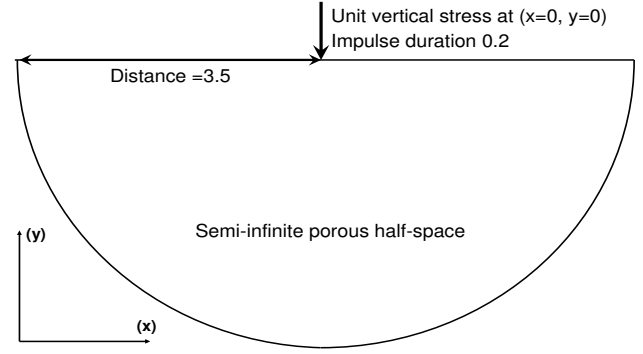


Figure 1. Geometry of the model.

A vertical (y) line impulse is applied on an homogeneous, isotropic, saturated poro-viscoelastic half-space (Fig. 1). Values appearing on the figure are non-dimensionalized. Dirichlet's conditions corresponding with the zero displacements for both phases are imposed at depth at the border of the medium. The (Ω) space is meshed with 50 626 triangular elements and 25 617 eight-degrees-of-freedom nodes, inducing a dimensionless space step $dx = 0.03$. The usual dimensionless time step taken is 0.002.

The soil characteristics were chosen from a bibliography review and are relative to a stiff ground. They are presented in Table 1.

In the following paragraphs, we are going to study the influence of the three couplings :

- viscous coupling : permeability ranging from 10^{-8} to 10^{-6} m³kg⁻¹s; it expresses the energy dissipation due to the relative movement between the two phases;
- mass coupling : tortuosity ranging from 1 to 5; it conveys a modification of the inertia due to the geometric nature of the medium;
- elastic coupling : comparison of different soils; it is linked to the relation between global dilatation and fluid dilatation.

3.2 Viscous coupling

In all the following sections, numerical values are dimensionless values: it will not be specified any further.

Fig. 2 presents the horizontal and vertical solid and fluid displacements for a point located on the surface ($x = 1, y = 0$) of the semi-infinite medium for a low permeability $K = 0.013$.

Wave speeds can be deduced from the previous soil characteristics: $c_{P1} = 1.9$, $c_S = 1.2$, $c_{P2} = 0.65$. This

yields theoretical arrival times of the different waves at the studied point: $t_{P1} = 0.55$, $t_S = 0.85$, $t_{P2} = 1.55$, that are in agreement with Fig. 2.

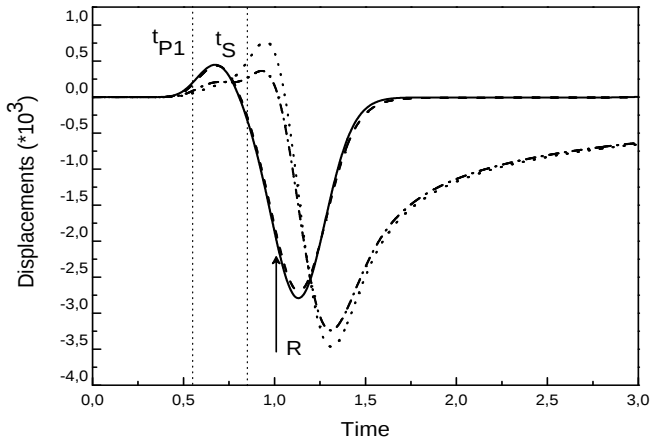


Figure 2. Surface horizontal solid (solid line), horizontal fluid (dashed line), vertical solid (dotted line) and vertical fluid (dash-dotted line) displacements for a high viscous coupling $K = 0.013$.

The influence of the $P1$ wave is clearly perceptible for both the vertical and horizontal displacements. As for the S wave, its influence is perceptible on the vertical displacement and finds itself mixed with the Rayleigh wave for the horizontal displacement, which generally prevents us from seeing it. The Rayleigh wave, preponderant on the surface, brings about an opposite contribution to that of the $P1$ and S waves and is very clearly seen for both displacements. Next, the displacements return to 0 after the waves have passed. Since the $P2$ wave carries very little energy, it is not visually perceptible with these chosen soil parameters.

A similar figure is drawn for a higher permeability $K = 0.13$ (Fig. 3). For such a value, the viscous coupling is lower: for this reason, the fluid behaviour differs from the solid behaviour more than in the previous case. The amplitude of the fluid displacement is lower and its response is more space apart in time. Moreover, the shear wave disappears in the fluid phase due to the low level of viscous coupling.

Fig. 4 shows the transversal displacement of the fluid phase for different values of permeability, ($x = 1, y = 0$). The fluid deforms upon the arrival of the S wave because of the viscous coupling. With strong permeability the fluid no longer responds to the S wave, conforming with its intrinsic nature.

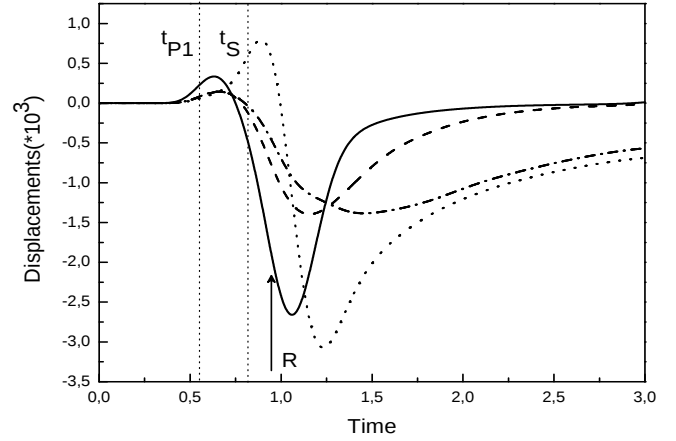


Figure 3. Surface horizontal solid (solid line), horizontal fluid (dashed line), vertical solid (dotted line) and vertical fluid (dash-dotted line) displacements for a low viscous coupling $K = 0.13$.

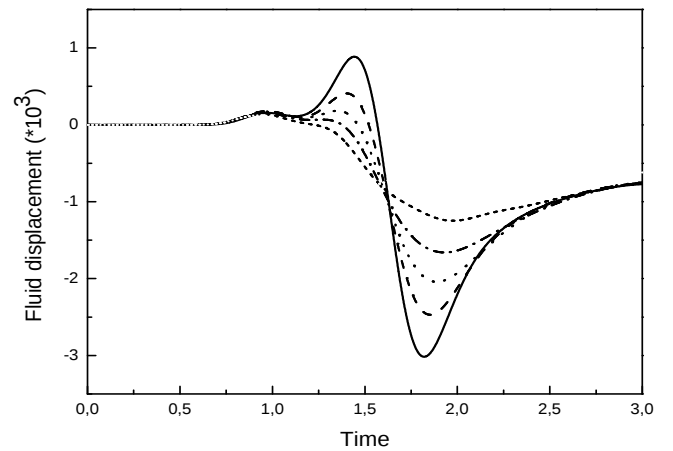


Figure 4. Shear wave in the fluid phase function of permeabilities for $K = 0.0026$ (solid line), $K = 0.026$ (dashed line), $K = 0.065$ (dotted line), $K = 0.13$ (dash-dotted line) and $K = 0.26$ (short dashed line).

3.3 Mass coupling

In this part, the influence of the mass coupling is studied. Thus, Fig. 5 and Fig. 6 show the fluid and solid displacements for different values of tortuosity, ($x = 1, y = 0$). The general features of the solid curves are less modified than those of the fluid curves: for the solid response, only a slight change in the wave speeds and displacement amplitudes occurs whereas for the fluid phase, a deep change in the behaviour

happens.

As for the fluid phase, the main conclusions are similar to those deduced from the study on the influence of the viscous coupling. Increasing tortuosity makes the fluid displacement closer to the solid displacement; the shear wave appears on the fluid phase. On the contrary, decreasing the mass coupling makes the two phases more and more different: the fluid prefers flow to deformation and amplitudes are lower.

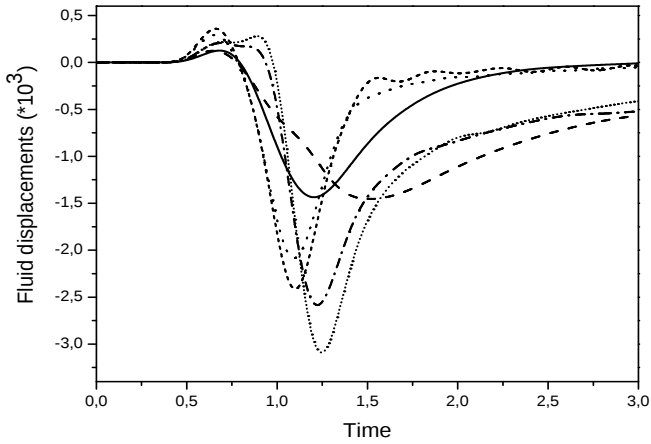


Figure 5. Surface horizontal and vertical fluid displacements for $a = 1$ (respectively solid and dashed lines), $a = 3$ (respectively dotted and dash-dotted lines), $a = 5$ (respectively short dashed and short dotted lines).

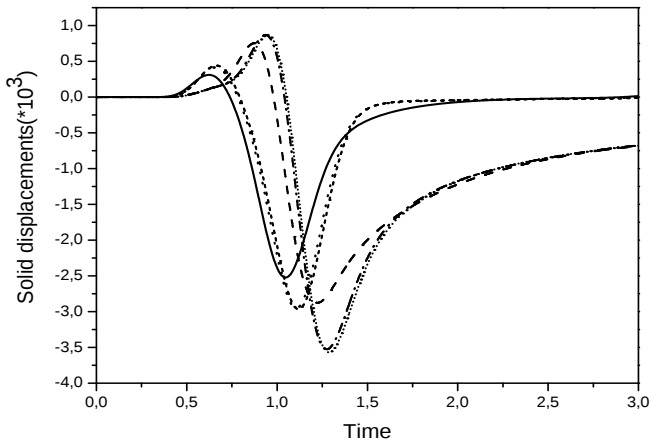


Figure 6. Surface horizontal and vertical solid displacements for $a = 1$ (respectively solid line and dashed lines), $a = 3$ (respectively dotted and dash-dotted lines), $a = 5$ (respectively short dashed and short dotted lines).

3.4 Elastic coupling

Table 2. Characteristics of soil "b".

λ_0 (MPa)	μ (MPa)	M (MPa)	β	η (s)
692	462	5 100	0.975	0.001

The elastic coupling is linked to Biot coefficient β . The value of β is a characteristic of the nature of the ground : β tends towards 1 as the skeleton is softer. Thus, its study involves the variation of both Lamé coefficients, Biot coefficients and damping. In the following, only two kinds of soil are compared: soil "a" (stiff soil, characteristics given in Table 1) and soil "b" (softer soil, characteristics given in Table 2).

As β tends towards 1, the amplitudes of fluid and solid displacements are higher because the ground is softer as shown on Fig. 7, ($x = 1, y = 0$). The nature of the ground yields different values for wave speeds: consequently, a delay occurs on the wave arrival times. Moreover, the wave front is more spread in time.

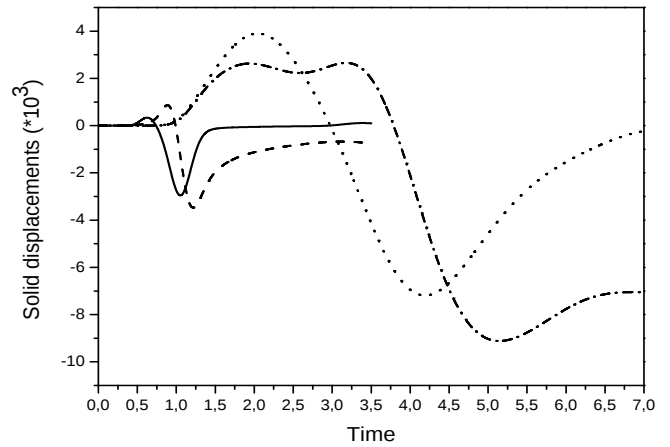


Figure 7. Horizontal and vertical surface solid displacements for soil "a" ((solid line) and (dashed line)) and for soil "b" ((dotted line) and (dash-dotted line)).

Fig. 8 presents the vertical in-depth displacements for solid and fluid phases under the load ($x = 0, y = -1$). The Rayleigh wave disappears. As the load is vertical, vertical displacements correspond to compressional waves which are dominant in this case. Horizontal displacements are not of great interest in this configuration. On the curve relative to the soft ground, a second wave front is visualized: it is due to the P_2 wave which arrives at $t_{P_2} = 2.80$; the wave front has a smooth slope because it is a diffusive wave. In the case of a stiff ground, the P_2 wave has a lower

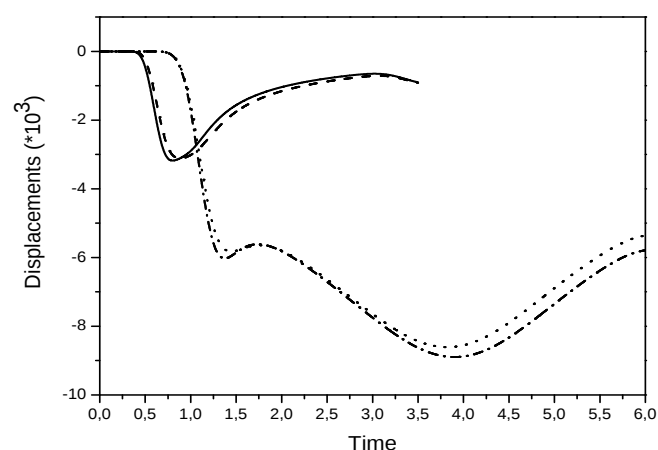


Figure 8. Vertical in-depth solid and fluid displacements for soil "a" ((solid line) and (dashed line)) and for soil "b" ((dotted line) and (dash-dotted line)).

influence and is not visualized on the figure; it could be seen for a lower viscous coupling.

4 CONCLUSIONS

In this paper, a numerical approach to study the wave propagation in porous viscoelastic saturated media has been presented. A Finite Element Method using a matrix-free technique and an expert multigrid system has been developed to treat Biot's complete equations, including viscous, mass and elastic couplings and a hysteretic Rayleigh damping. Results have dealt with the solid and fluid displacements over and within semi-infinite media. The influence of the permeability, the tortuosity and the Biot coefficient has been studied. The behaviour of the fluid and solid phases are either very close or very different depending on these parameters. Further research will include the study of different kinds of loads and more complex media combining different types of soils. The ultimate purpose of this research is to deduce a range of ground characteristics from the signal.

REFERENCES

- Atalla, N., Panneton, R. & Debergue, P. 1998. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *The Journal of the Acoustical Society of America* 104(3): 1444–1452.
- Biot, M.A. 1962. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *The Journal of the Acoustical Society of America* 34(9): 1254–1264.
- Bourbié, T., Coussy, O. & Zinszner, R. 1987. *Acoustics of Porous Media*. Paris: Editions Technip.

- Chambarel, A. & Ferry, E. 2000. Finite Element formulation for Maxwell's equations with space dependent electric properties. *Revue Européenne des Éléments Finis* 9(8): 941–967.
- Dhatt, G. & Touzot, G. 1981. *Une présentation de la méthode des Éléments Finis*. Paris: Editions Maloine S.A.
- Gajo, A., Saetta, A. & Vitaliani, R. 1994. Evaluation of three and two field finite element methods for the dynamic response of saturated soil. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37: 1231–1247.
- Hörlin, N.E., Nordström, M. & Göransson, P. 2001. A 3D hierarchical FE formulation of Biot's equation for elasto-acoustic modelling of porous media. *Journal of Sound and Vibration* 254(4): 633–652.
- Simon, B.R., Wu, J.S.S., Zienkiewicz, O.C. & Paul, D.K. 1986. Evaluation of u-w and u- π finite element methods for the dynamic response of saturated porous media using one-dimensional models. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 10: 461–482.
- Zienkiewicz, O.C. & Shiomi, T. 1984. Dynamic behaviour of saturated porous media: the generalized Biot formulation and its numerical solution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 8: 71–96.

4.4 Modélisation d'un massif hétérogène

Jusqu'à présent, le milieu a été modélisé par un massif homogène. En réalité, à l'échelle spatiale macroscopique, celui-ci est fréquemment hétérogène. Afin de mieux prendre en considération les disparités macroscopiques, et donc d'aborder et de traiter des massifs hétérogènes, nous nous proposons d'utiliser dans cette section la modélisation suivante : dans le sol homogène précédent, nous répartissons un certain pourcentage d'inclusions élémentaires. La distribution utilisée est aléatoire. Le sol de base est un sol dur de type rocheux, cf. tableau 1.1 du chapitre 1 section 8, dans lequel les obstacles sont modélisés par un milieu biphasique plus mou de type argileux, cf. tableau 1.2 du chapitre 1 section 8.

Les propriétés mécaniques du sol hétérogène étant des fonctions continues par morceaux et en envisageant les hétérogénéités comme des propriétés élémentaires, nous pouvons utiliser la formulation éléments finis développée précédemment.

Nous cherchons alors à étudier la sensibilité du milieu hétérogène en fonction de la proportion d'inclusions par rapport au cas homogène : nous étudions notamment la réponse du massif aux déformations générées par les différentes ondes. La réponse de chacune des deux phases solide et fluide est visualisée.

Nous présentons les isodéplacements des phases solide et fluide du massif au temps adimensionné $t = 1.5$: ce temps d'observation permet en effet de bien étaler et donc de bien visualiser les déformations des différentes ondes. Les pourcentages de distribution présentés ici sont :

- ✓ 0% (sol homogène), figures 4.1 (a) et 4.1 (b)
- ✓ 2%, figures 4.2 (a) et 4.2 (b)
- ✓ 5%, figures 4.3 (a) et 4.3 (b)
- ✓ 20%, figures 4.4 (a) et 4.4 (b)
- ✓ 40%, figures 4.5 (a) et 4.5 (b)

Pour le sol homogène, les deux phases sont fortement découplées par le choix de valeurs de couplages visqueux et massique faibles, c'est-à-dire par l'intermédiaire d'une forte perméabilité et d'une faible tortuosité. Le front d'onde de $P1$ correspond au demi-cercle de rayon $r = 2.8$ visualisé sur la figure 4.1 (a). La contribution de l'onde de compression de première espèce est moindre que celles des ondes S et R . L'onde de Rayleigh présente un maximum de déplacement en surface pour $r = 1.6$. L'onde de cisaillement, dont la vitesse est très proche de celle de R , se visualise préférentiellement en profondeur où l'influence de l'onde de Rayleigh décroît exponentiellement. Le demi-cercle de rayon $r = 1.7$ corres-

pond à l'arrivée de l'onde S . Pour la phase fluide, du fait du fort découplage entre les deux phases, les fronts d'onde de $P1$ et de R sont beaucoup plus étalés temporellement, conformément à ce qui a déjà été vu précédemment lors de l'étude des déplacements en fonction du temps pour des points situés sous la charge. Les ondes se retrouvent donc plus mélangées et leurs contributions moins identifiables.

En ce qui concerne le milieu hétérogène, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- ✓ globalement, les fronts d'onde de la phase solide sont moins perturbés par la présence des obstacles que ceux de la phase fluide. Ils restent bien ordonnés jusqu'à une proportion d'inclusions d'au moins 20% : par exemple, l'influence de l'onde de Rayleigh ou encore celle de $P1$ et de S reste distincte en surface et en profondeur. Par contre, pour 40% d'inclusions, le front d'onde solide est globalement structuré et les surfaces d'onde ne sont plus concentriques. De plus, les obstacles, en réfléchissant une partie des différentes ondes, concentrent la déformation dans une zone géographique plus petite que dans le cas homogène et génèrent ainsi des déformations plus importantes dans cette zone. Enfin, plus le pourcentage d'obstacles est élevé, plus les ondes sont ralenties. La présence des obstacles ralentit la progression de la déformation par rapport au cas homogène, ce qui est le cas pour les deux phases solide et fluide, cf. figures (4.6) et (4.7). Ces conclusions dénotent un changement des caractéristiques moyennes du milieu fonction du pourcentage d'inclusions.
- ✓ la sensibilité de la phase fluide est beaucoup plus marquée : en effet, les fronts d'onde fluide se désordonnent très vite. Nette pour le massif homogène, la cartographie du fluide devient perturbée dès quelques pourcents d'inclusions : ceci apparaît clairement pour 5% d'inclusions et commence à se visualiser pour 2% d'inclusions. Les obstacles structurent le front d'onde. La phase fluide s'écoule plus vite et se déforme plus fortement dans certains secteurs en fonction de la répartition des inclusions. Pour des répartitions de 20% et de 40%, celle-ci continue de présenter quelques zones ponctuelles éloignées déformées mais présente surtout une zone globale moyenne fortement déformée. La phase fluide étant ralentie par les obstacles, la taille de cette zone est petite et concentrée sous la sollicitation. Notons enfin que l'amplitude des déplacements est alors plus grande que dans le cas homogène.

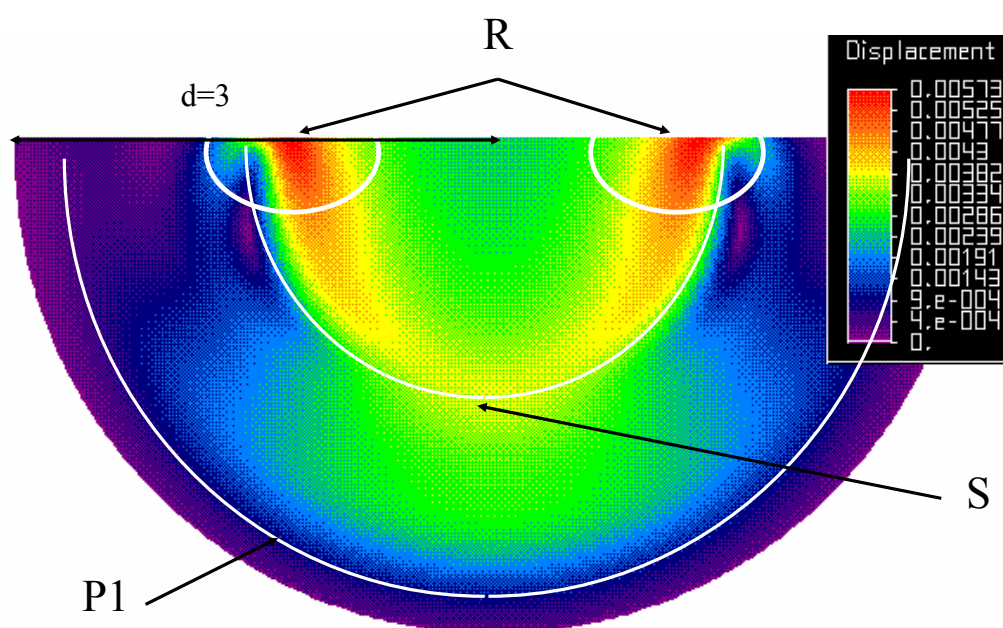
Ainsi, la phase fluide devient très vite désordonnée par la présence d'obstacles, ce qui ne se visualise que plus tardivement au niveau de la phase solide : la phase fluide apporte un complément d'informations qu'un modèle monophasique ne permet pas d'obtenir.

On peut confirmer les conclusions précédentes en visualisant le déplacement temporel de deux points situés en surface et en profondeur du massif. Nous constatons effectivement un retard à la déformation, par exemple sur le déplacement solide transversal en surface,

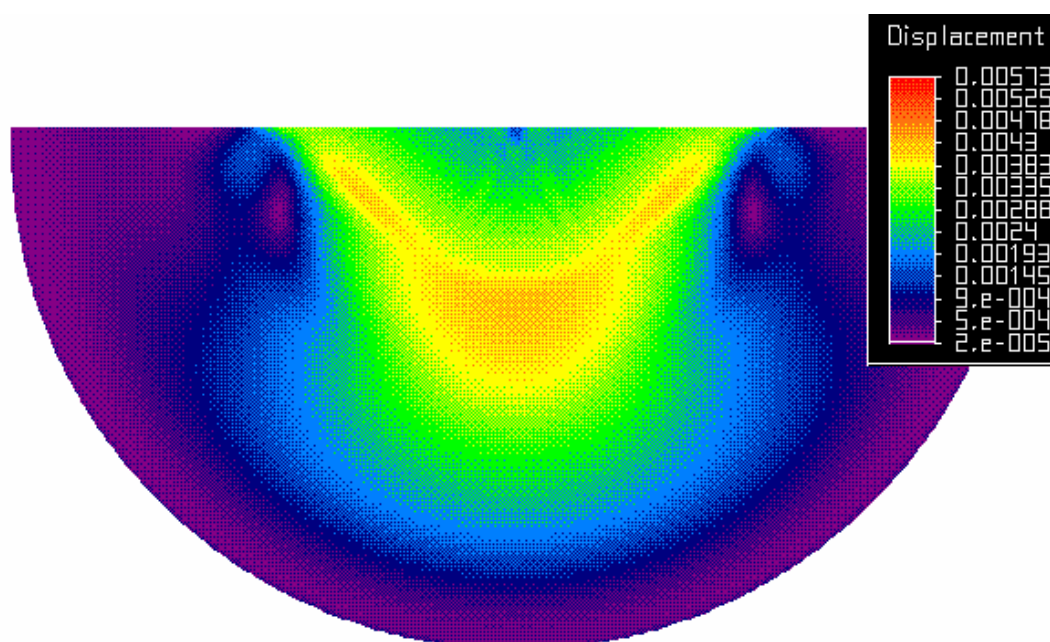
cf. figure (4.6), ou sur le déplacement fluide longitudinal en profondeur, cf. figure (4.7), en fonction de l'augmentation de la quantité d'inclusions dans le massif. En plus du retard dans l'arrivée des déformations dues à S ou à $P1$, la perturbation est de plus en plus étalée temporellement, sa durée augmente. Des conclusions générales sur les amplitudes ne peuvent pas être tirées car en regardant un point particulier, la répartition des obstacles étant aléatoire, les amplitudes de déformations ne correspondent qu'à un cas particulier. Ce n'est qu'avec la cartographie globale précédente que des conclusions plus générales peuvent être obtenues.

La même étude a été menée avec des inclusions monophasiques solides équivalentes au sol mou et les résultats obtenus sont similaires. Des modifications sur les célérités des différentes ondes dans le massif et sur les amplitudes des déplacements sont à noter. De même, les allures des isodéplacements sont légèrement modifiées : néanmoins, nous retrouvons l'ensemble des conclusions précédentes.

Cette modélisation présente un premier exemple de milieu plus complexe et ouvre un certain nombre de perspectives. Ainsi, d'autres distributions de propriétés mécaniques peuvent être envisagées : on peut par exemple penser à utiliser une distribution log-normale pour la perméabilité hydraulique afin de mieux modéliser la répartition des perméabilités dans un sol réel, Vauclin [VAU83].

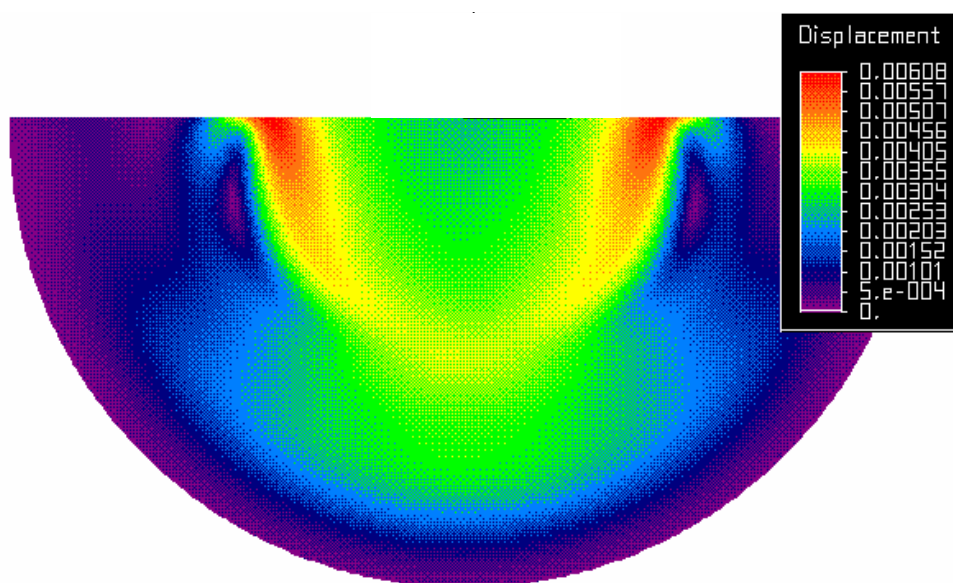


(a) *Isodéplacements solides*

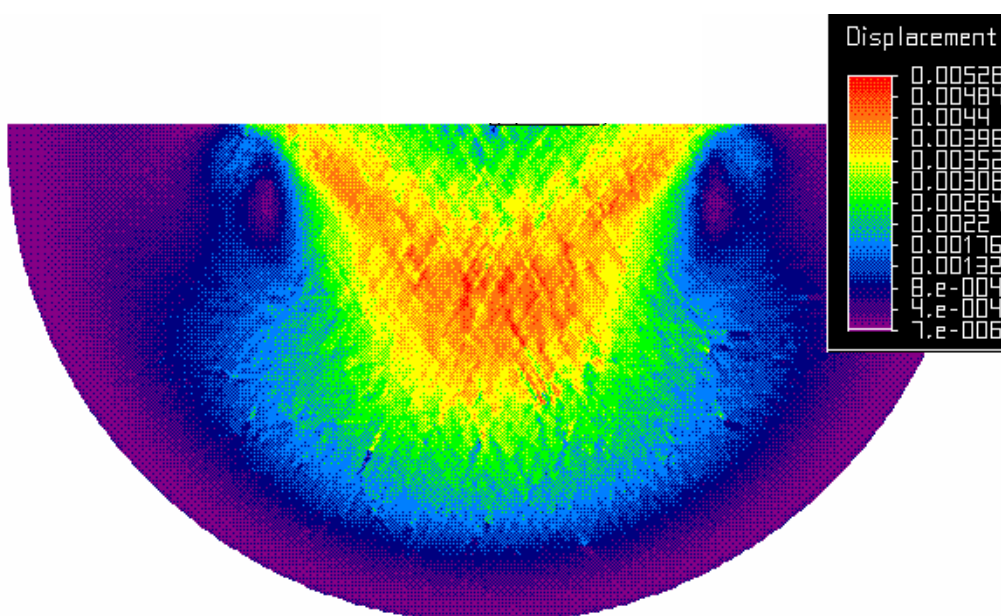


(b) *Isodéplacements fluides*

FIG. 4.1 – *Isodéplacements solides et fluides du sol homogène : cartographie à un instant $t = 1.5$.*

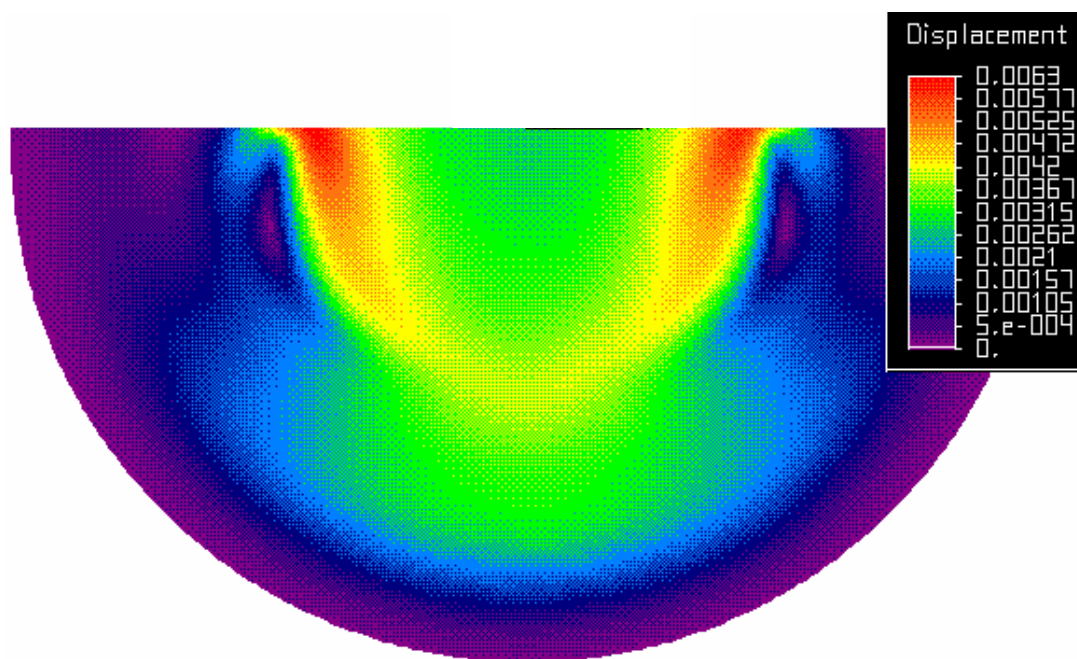


(a) *Isodéplacements solides*

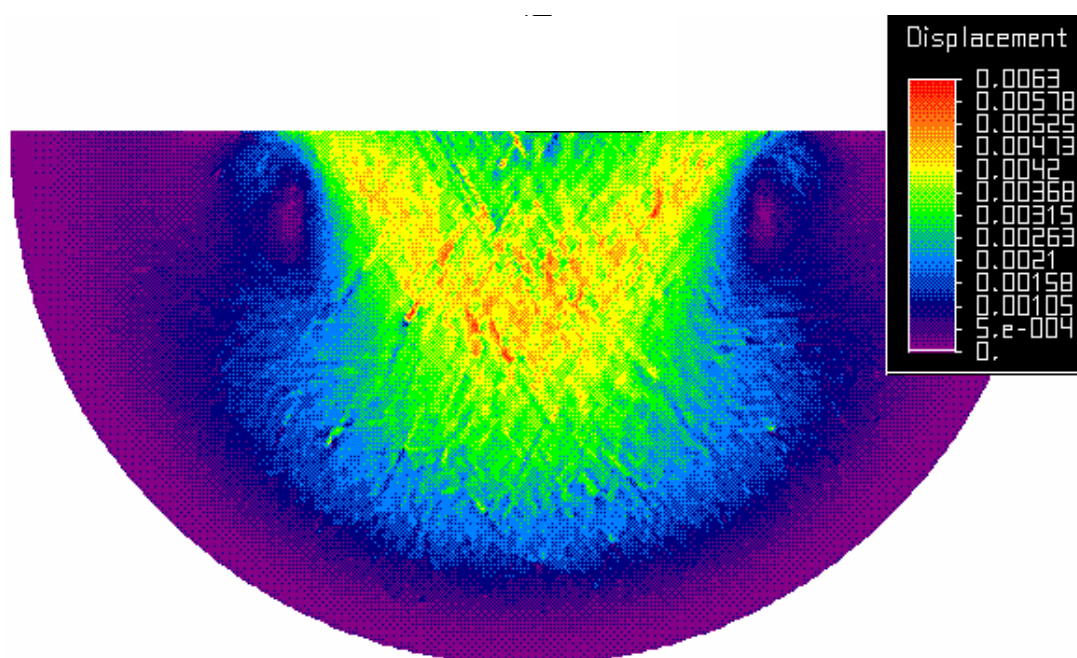


(b) *Isodéplacements fluides*

FIG. 4.2 – *Isodéplacements solides et fluides d'un sol hétérogène avec 2% d'inclusions : cartographie à un instant $t = 1.5$.*

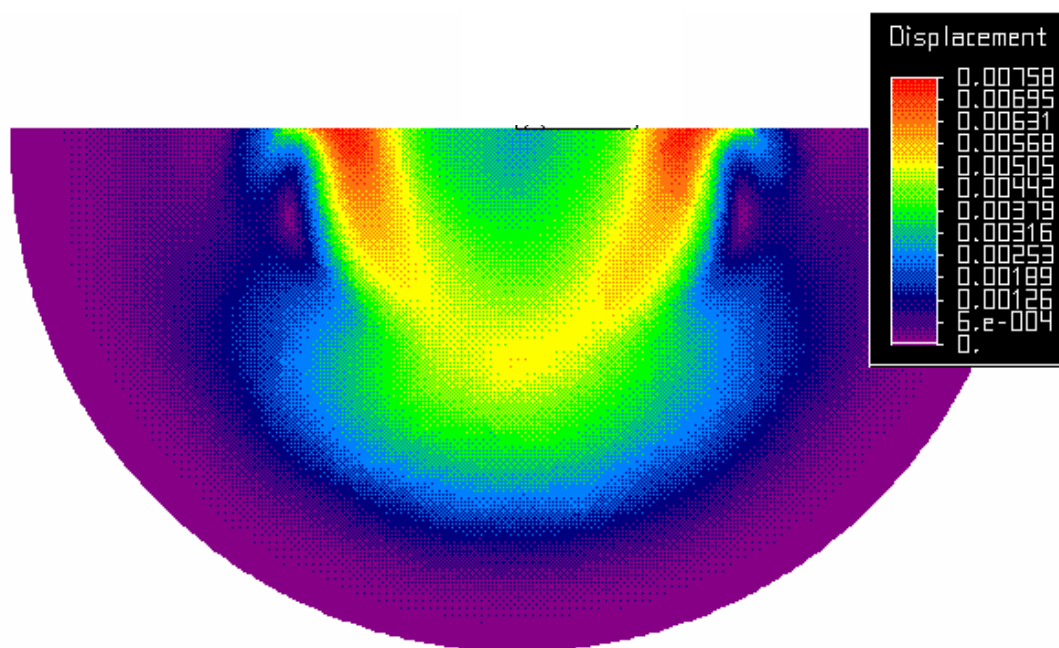


(a) *Isodéplacements solides*

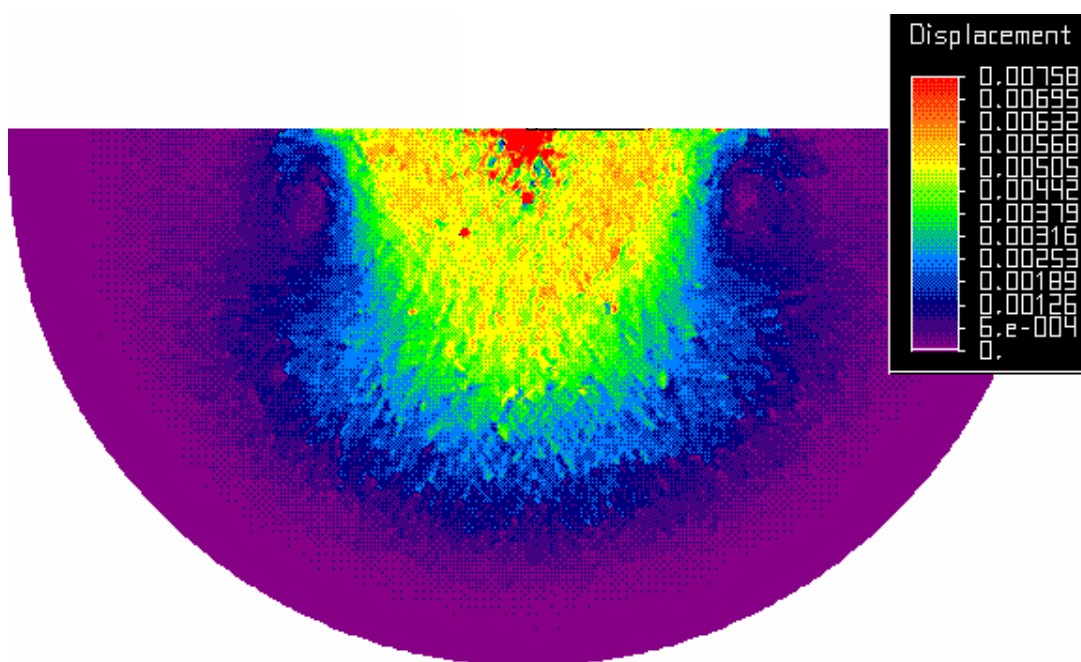


(b) *Isodéplacements fluides*

FIG. 4.3 – *Isodéplacements solides et fluides d'un sol hétérogène avec 5% d'inclusions : cartographie à un instant $t = 1.5$.*

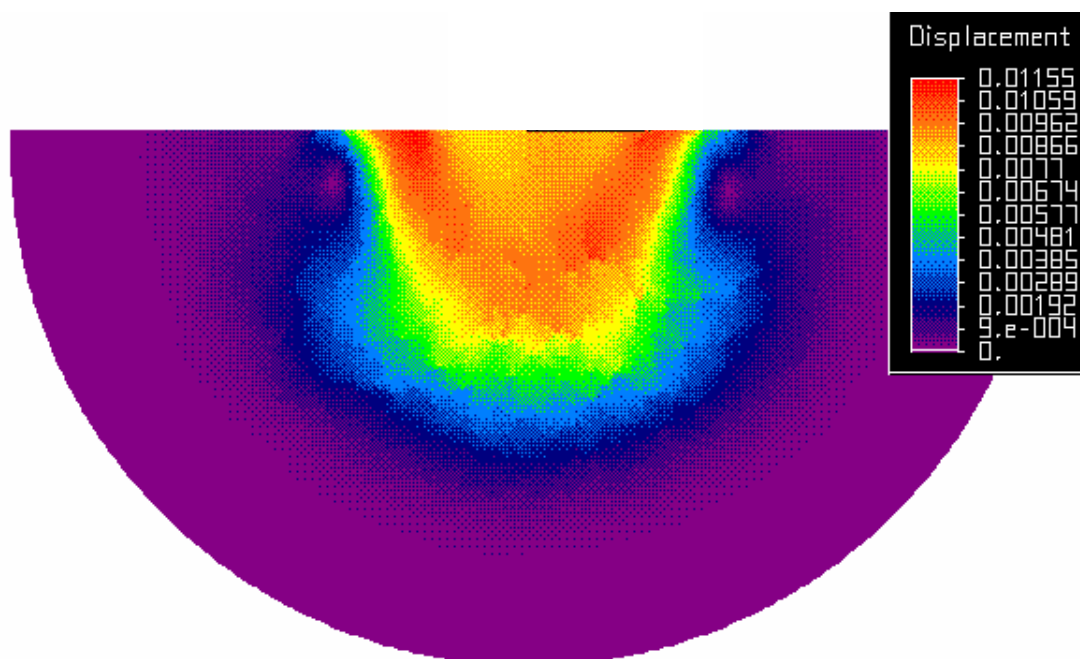


(a) *Isodéplacements solides*

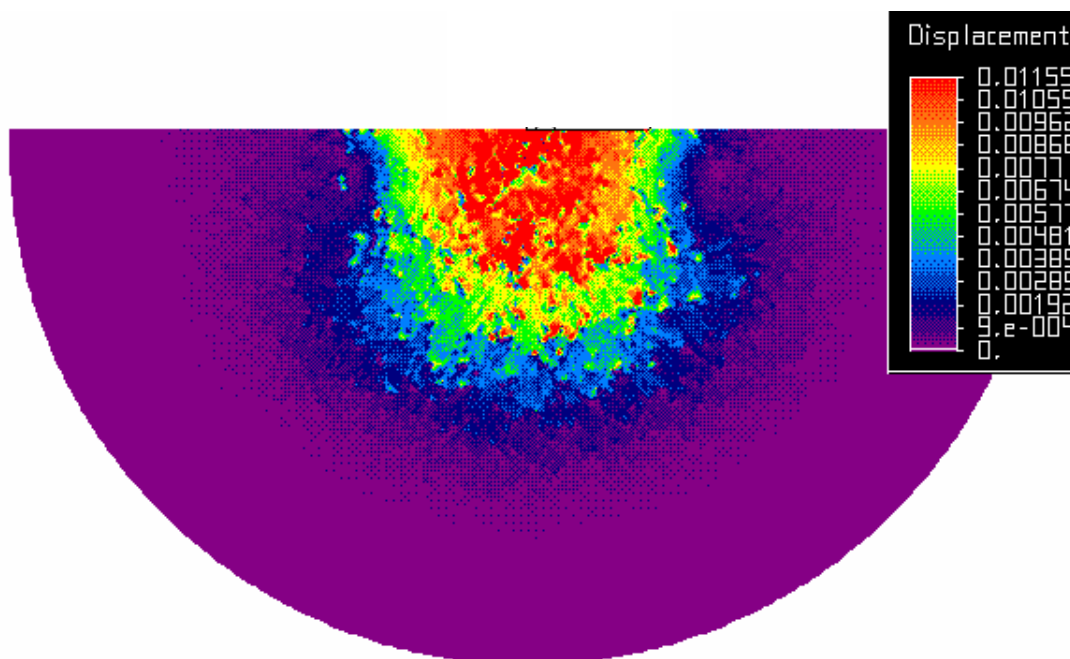


(b) *Isodéplacements fluides*

FIG. 4.4 – *Isodéplacements solides et fluides d'un sol hétérogène avec 20% d'inclusions : cartographie à un instant $t = 1.5$.*



(a) *Isodéplacements solides*



(b) *Isodéplacements fluides*

FIG. 4.5 – *Isodéplacements solides et fluides d'un sol hétérogène avec 40% d'inclusions : cartographie à un instant $t = 1.5$.*

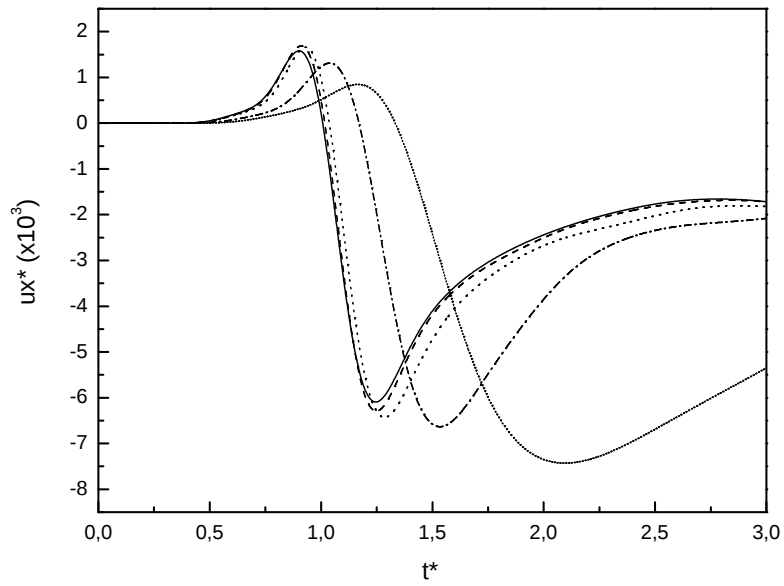


FIG. 4.6 – Déplacements solides en surface ($d = 1$) pour un sol homogène (trait plein), pour 2% d'inclusions (tirets), 5% (pointillés), 10% (tirets-pointillés) et 40% (pointillés courts).

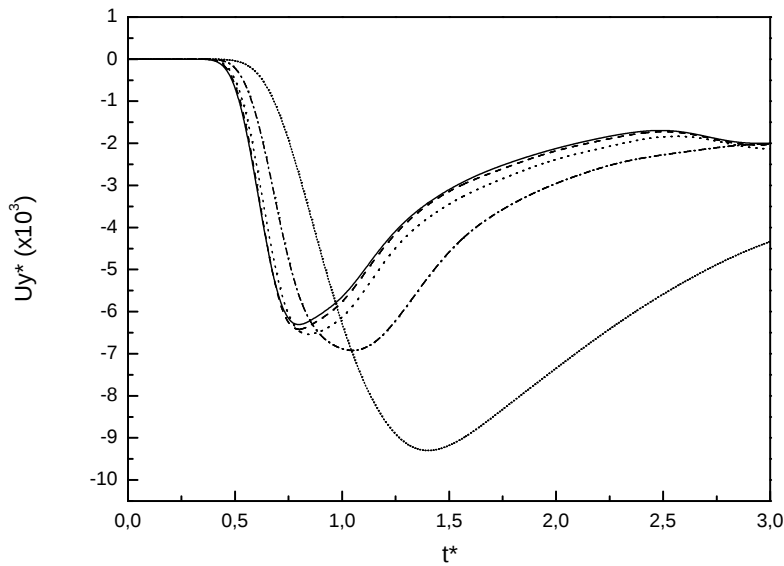


FIG. 4.7 – Déplacements fluides en profondeur sous la charge ($d = 1$) pour un sol homogène (trait plein), pour 2 % d'inclusions (tirets), 5% (pointillés), 10 % (tirets-pointillés) et 40% (pointillés courts).

4.5 Milieu poreux partiellement saturé

Jusqu'à présent, les exemples traités ont concerné le cas de milieux saturés. Le modèle de Biot permet également de simuler le comportement de milieux partiellement saturés : nous nous proposons maintenant d'aborder cette étude.

4.5.1 Modèle de milieu partiellement saturé

Il y a plusieurs façons d'appréhender l'étude du milieu poreux partiellement saturé : une troisième phase gazeuse, de l'air dans notre cas, doit être prise en compte dans la modélisation du milieu. La première approche consiste à considérer que l'air, en très faible quantité, forme de petites bulles emprisonnées dans le liquide largement majoritaire. Cette modélisation revient donc soit à modifier la rigidité de la phase fluide soit à modifier le module d'incompressibilité de celle-ci, Verruijt [VER69]. La seconde approche est plus générale et prend en compte à part entière une troisième phase : une profonde adaptation de la théorie de Biot à un système triphasique solide-liquide-gaz est alors nécessaire.

Nous adoptons dans ce paragraphe la première modélisation. Le mélange de liquide et d'air dans la phase fluide est quantifié par le degré de saturation S_R défini par :

$$S_R = \frac{V_{liq}}{V_{fl}} \quad (4.1)$$

où V_{liq} et V_{fl} représentent respectivement le volume occupé par le liquide et le volume occupé par la phase fluide, à savoir le volume de l'espace connecté. Le milieu saturé a un degré de saturation de 1.

Lorsque le degré de saturation est suffisamment grand, S_R supérieur à 90%, on peut considérer que l'air est noyé dans le liquide sous forme de microbulles. Sous cette hypothèse, le mélange liquide majoritaire - air minoritaire peut être homogénéisé en une seule phase fluide dont la compressibilité est modifiée et est fonction de celle du liquide, du degré de saturation et de la pression absolue liquide, Yang [YAN01]. Le module d'incompressibilité K_{fl} de la phase fluide homogène est alors défini par :

$$\frac{1}{K_{fl}} = \frac{S_R}{K_{liq}} + \frac{1 - S_R}{K_g} \quad (4.2)$$

où K_{liq} et K_g sont respectivement les modules d'incompressibilité du liquide et de l'air.

En considérant que l'air obéit à la loi des gaz parfaits et qu'il subit des transformations isothermes, le module d'incompressibilité K_g est égal à :

$$\frac{1}{K_g} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{\frac{nM}{V}} \frac{M}{RT} = \frac{1}{P} \quad (4.3)$$

où n , M , R , V et T sont respectivement le nombre de mole, la masse molaire, la constante des gaz parfaits, le volume occupé par l'air et la température de l'air. P est la pression que

	Sol 0	Sol 1	Sol 2	Sol 3
Saturation S_R en %	100	99.99	99.9	95
Module d'incompressibilité fluide en MPa	2 200	690	96	2
Premier coefficient de Biot en Mpa	5 270	1701	240	5
Vitesse de l'onde $P1$ en ms^{-1}	3770	3720	3700	3695
Vitesse de l'onde $P2$ en ms^{-1}	1300	750	280	40
Vitesse adimensionnée de l'onde $P1$	1.90	inchangée	inchangée	inchangée
Vitesse adimensionnée de l'onde $P2$	0.65	0.40	0.15	0.02
Temps d'arrivée adimensionné de $P1$	0.25	inchangée	inchangée	inchangée
Temps d'arrivée adimensionné de $P2$	0.75	1.25	3.35	25

TAB. 4.1 – *Sols durs partiellement saturés, complément des caractéristiques mécaniques présentées dans le tableau 1.1 : temps d'arrivées calculés pour une distance adimensionnée de 0.5.*

subit le gaz, à savoir la pression absolue liquide. D'autres transformations, adiabatiques par exemple, peuvent être envisagées.

Nous prenons 1 bar = 10^5 Pa pour la pression absolue moyenne liquide P_{liq} dans la suite du chapitre et des valeurs proches de 1 pour le degré de saturation. Le module d'incompressibilité K_{fl} de la phase fluide homogène est alors calculé par :

$$\frac{1}{K_{fl}} = \frac{1}{K_{liq}} + \frac{1 - S_R}{P_{liq}} \quad (4.4)$$

Une autre approche de la détermination du module d'incompressibilité du pore fluide homogénéisé avec les mêmes hypothèses est présentée par Smeulders et al. [SME92]. Les auteurs mettent en évidence la dépendance fréquentielle de K_{fl} et aboutissent à la valeur littérale précédente.

Il est important de noter que la présence d'une faible quantité d'air, même une très faible quantité, réduit drastiquement la valeur du coefficient d'incompressibilité de la phase fluide et en conséquence la valeur du second coefficient de Biot M . Les vitesses des deux ondes de compression $P1$ et $P2$ s'en trouvent alors modifiées, l'onde de cisaillement S est intrinsèquement indépendante de la phase fluide. Les résultats suivants vont mettre en évidence cette forte dépendance des vitesses des ondes de compression en fonction de la saturation du milieu poreux par l'intermédiaire de l'étude de deux cas :

- ✓ sols durs pour différentes saturations présentés dans le tableau 4.1,
- ✓ sols mous pour différentes saturations présentés dans le tableau 4.2.

4.5.2 Etude du sol dur

Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le cas d'un sol dur : l'effet de la non saturation, qui a des répercussions sur les deux ondes de compression, n'affecte ici notablement que la seconde onde de compression $P2$. En effet, le caractère rigide du squelette solide a une influence prépondérante sur la vitesse de l'onde $P1$ et la saturation partielle ne modifie au plus que de 2% sa vitesse dans le cas le moins saturé où $S_R = 95\%$. $P1$ est ainsi "porté" par le squelette solide.

Par conséquent, la saturation partielle du milieu a des répercussions quasi-exclusivement sur l'onde $P2$ et sa vitesse, ce qui nous permet indirectement de remettre en évidence l'onde $P2$ et de retrouver les caractéristiques de celle-ci, cf. tableau 4.1. Dans le cas où $S_R = 99.9\%$, la vitesse de la seconde onde de compression devient égale à 22 % de la vitesse de $P2$ dans le cas saturé.

Nous nous plaçons dans les mêmes conditions qu'à la section 4.2 : nous choisissons un point d'observation peu éloigné géométriquement de l'impulsion, en profondeur pour nous affranchir de l'influence prépondérante de l'onde de Rayleigh, et avec un découplage conséquent des deux phases. En particulier, la perméabilité a été choisie forte pour bien mettre en évidence l'onde $P2$ et ses caractéristiques. Les figures 4.8 et 4.9 relient ainsi les déplacements longitudinaux solide et fluide en profondeur sous la charge à une distance adimensionnée de 0.5 en fonction du temps pour les 4 saturations précédentes.

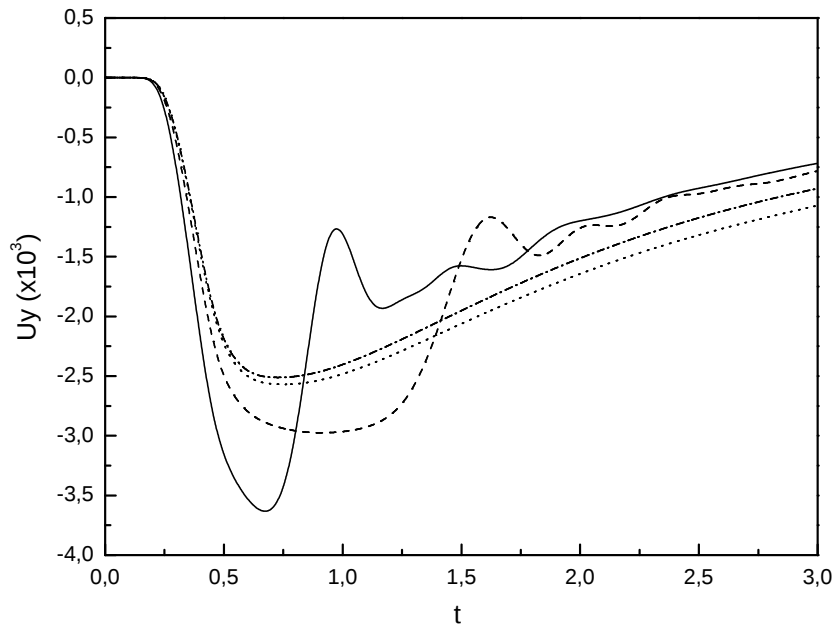


FIG. 4.8 – Déplacement longitudinal fluide sous la charge fonction de la saturation du milieu pour le sol 0 (trait plein), sol 1 (tirets), sol 2 (pointillés) et sol 3 (tirets-pointillés).

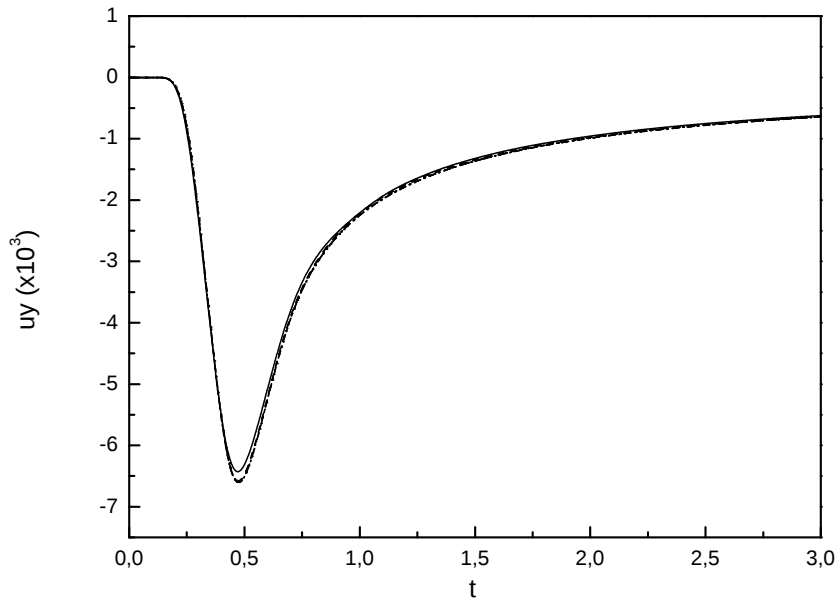


FIG. 4.9 – Déplacement longitudinal solide sous la charge fonction de la saturation du milieu pour le sol 0 (trait plein), sol 1 (tirets), sol 2 (pointillés) et sol 3 (tirets-pointillés).

Les conclusions sont les suivantes : l'influence de la non saturation est mise en évidence sur le déplacement de la phase fluide. L'onde $P2$ est visualisée et ses fronts d'onde sont bien décalés en fonction de la saturation du milieu (sols 0 et 1) ou se retrouvent hors visualisation dans le cas de vitesse faible pour les sols 2 et 3. L'onde $P2$ faiblement énergétique n'a par contre aucune influence sur le déplacement du squelette solide, fortement rigide pour ce sol dur, et aucune influence notable comme attendu sur la vitesse de l'onde $P1$, cf. figure 4.9. Notons cependant que le caractère dispersif fort de cette seconde onde de compression génère toujours un décalage, identique sur toutes les courbes, sur le temps d'arrivée de $\Delta t \simeq 0.2 - 0.3$ par rapport à celui issu du calcul de la vitesse limite effectué dans le chapitre 2.

4.5.3 Etude du sol sablo-argileux

Le sol sablo-argileux est moins rigide que le sol précédent : par conséquent, ce sont les vitesses des deux ondes de compression $P1$ et $P2$ qui sont modifiées. Par exemple, pour une saturation partielle $S_R = 99.9\%$, la vitesse de l'onde $P1$ (respectivement $P2$) devient égale à 55% (respectivement 40%) de la vitesse de $P1$ (respectivement $P2$) dans le cas saturé. Les vitesses des deux ondes de compression pour ce sol sont donc très sensibles à la saturation partielle du milieu, cf. tableau 4.2.

Les figures 4.10 (a) et (b) montrent les déplacements solides longitudinal et transversal en fonction du temps et en fonction de la saturation du milieu poreux. Le point

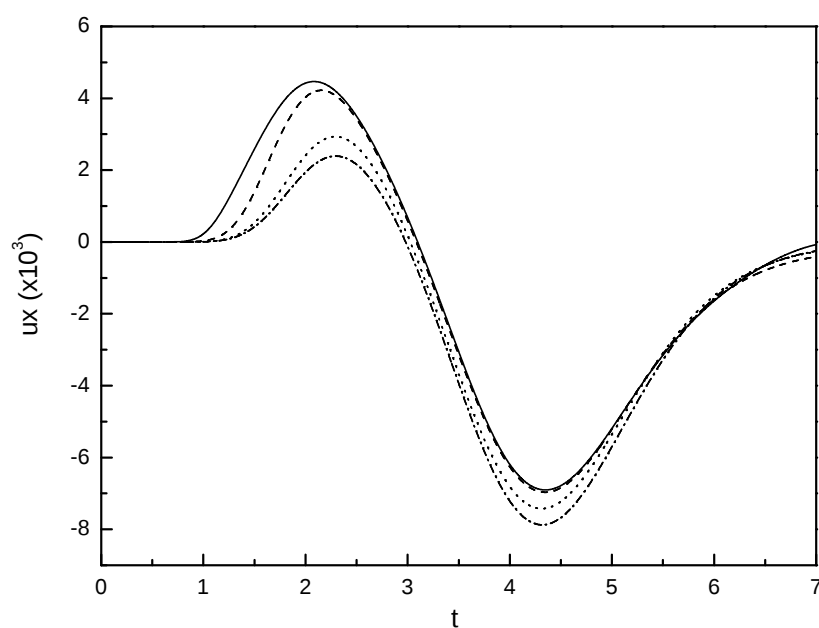
	Sol 4	Sol 5	Sol 6	Sol 7
Saturation S_R en %	100	99.99	99.9	95
Module d'incompressibilité fluide en MPa	2 200	690	96	2
Premier coefficient de Biot en Mpa	5 097	1680	239	5
Vitesse de l'onde S en ms^{-1}	530	inchangée	inchangée	inchangée
Vitesse de l'onde $P1$ en ms^{-1}	1870	1285	1030	995
Vitesse de l'onde $P2$ en ms^{-1}	695	585	280	40
Vitesse adimensionnée de l'onde S	0.25	inchangée	inchangée	inchangée
Vitesse adimensionnée de l'onde $P1$	0.95	0.65	0.50	0.50
Vitesse adimensionnée de l'onde $P2$	0.35	0.30	0.15	0.02
Temps d'arrivée adimensionné de S	4	inchangée	inchangée	inchangée
Temps d'arrivée adimensionné de $P1$	1.05	1.55	2	2
Temps d'arrivée adimensionné de $P2$	2.85	3.35	6.65	50

TAB. 4.2 – Sols sablo-argileux partiellement saturés, complément des caractéristiques mécaniques présentées dans le tableau 1.2 : temps d'arrivées calculés pour une distance adimensionnée de 0.5.

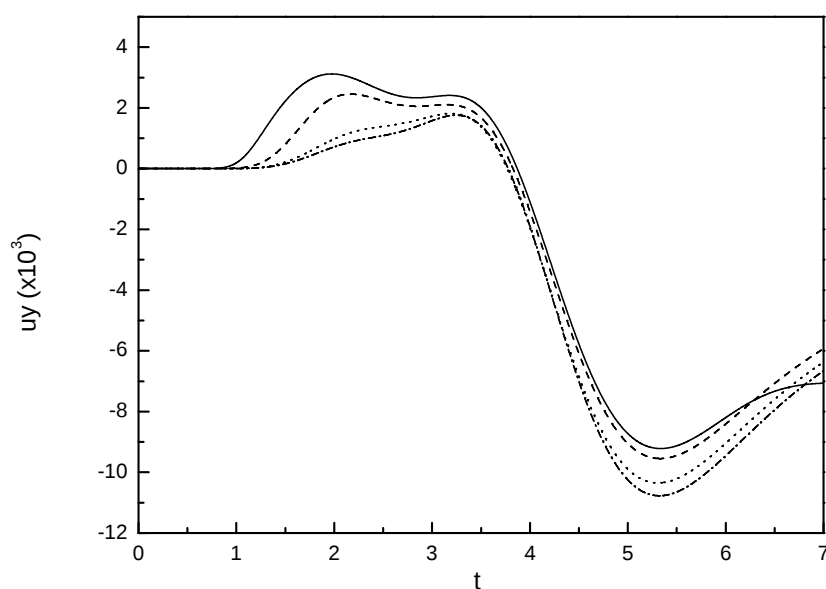
d'observation de surface est situé à une distance adimensionnée de 1.

Tout d'abord, nous retrouvons les mêmes conclusions que celles de la section 4.3 : les déformations générées par le sol sablo-argileux ont des amplitudes plus élevées que celles du sol dur, quelle que soit la nature longitudinale ou transversale de la déformation. Les signaux sont plus étalés temporellement, la dispersion est plus forte. De plus, la dissociation des deux phases solide et fluide en fonction des couplages est beaucoup plus difficile à obtenir : les deux phases ont, à même valeur de perméabilité, ou même valeur de tortuosité, une réponse en déformation plus similaire pour le sol sablo-argileux que pour le sol dur. Leur découplage est donc beaucoup plus difficile à obtenir, sauf en ce qui concerne l'influence du cisaillement sur la phase fluide à faible couplage. Le comportement est alors à rapprocher d'un sol monophasique de caractéristiques mécaniques intermédiaires.

L'influence de la saturation se visualise sur les temps d'arrivée de l'onde $P1$ en surface. Plus la saturation est faible, plus l'onde $P1$ est lente. La vitesse de S n'est pas affectée par la saturation comme attendu. Enfin, le comportement de la phase fluide est très proche de celui de la phase solide, exceptée l'influence de l'onde de cisaillement S sur le déplacement transversal, cf. figures 4.11 (a) et (b).

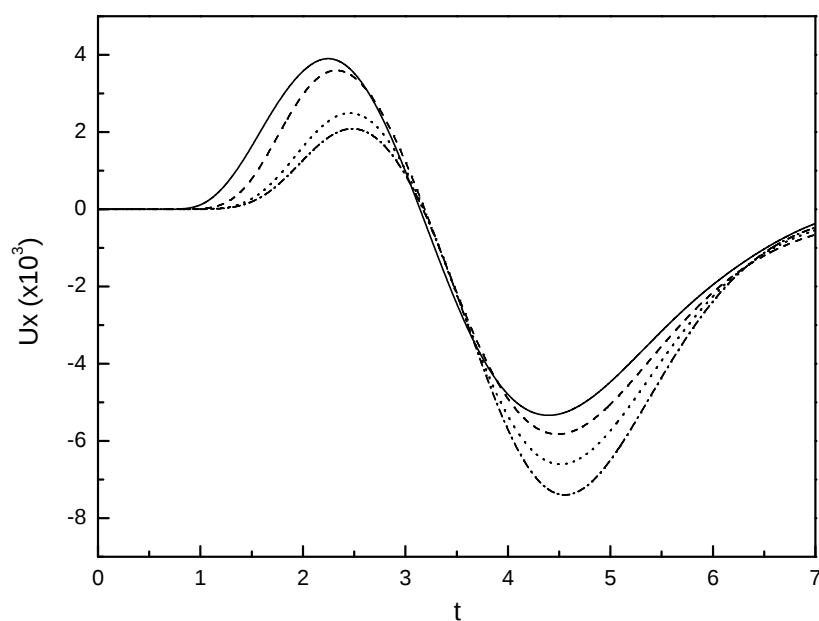


(a) Déplacement solide longitudinal en surface

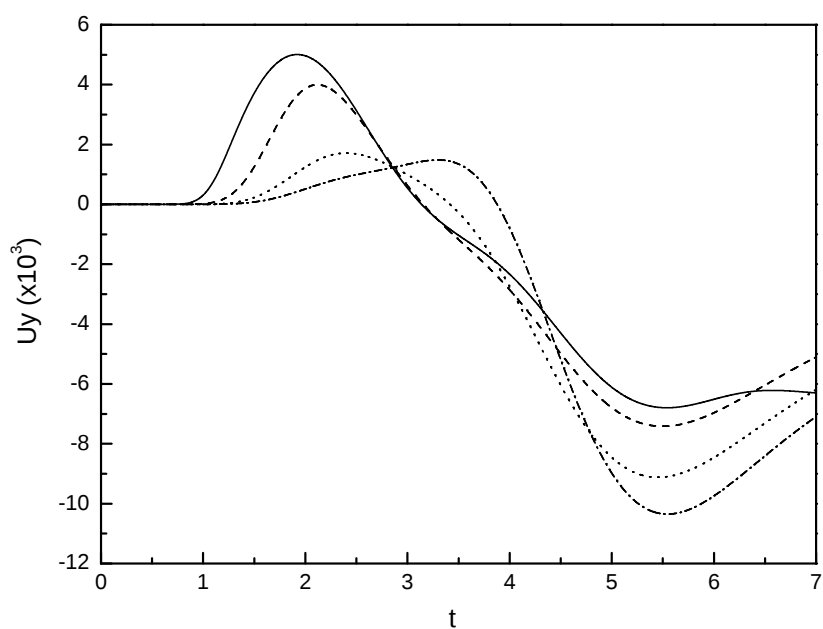


(b) Déplacement solide transversal en surface

FIG. 4.10 – Déplacement solide en surface fonction de la saturation du milieu pour le sol 4 (trait plein), sol 5 (tirets), sol 6 (pointillés) et sol 7 (tirets-pointillés).



(a) Déplacement fluide longitudinal en surface



(b) Déplacement fluide transversal en surface

FIG. 4.11 – Déplacement fluide en surface fonction de la saturation du milieu pour le sol 4 (trait plein), sol 5 (tirets), sol 6 (pointillés) et sol 7 (tirets-pointillés).

L'onde $P2$ est toujours mise en évidence en profondeur et elle se visualise dans le sol sablo-argileux aussi bien sur la phase fluide que sur la phase solide. L'onde $P2$ apparaît sur les sols 4 et 5 sur les deux phases, même si elle est plus marquée sur la phase fluide que solide : elle se retrouve hors visualisation pour le sol 7 avec l'échelle temporelle choisie, cf. figure 4.12.

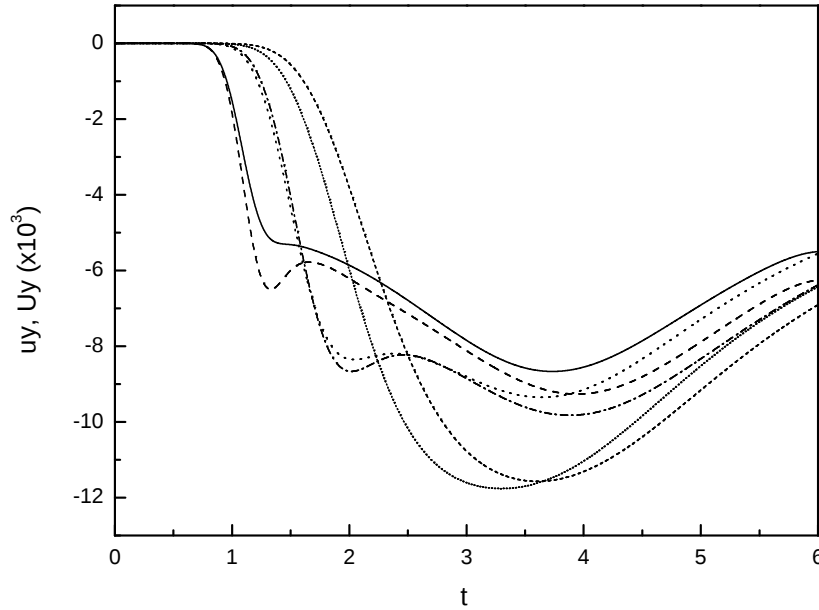


FIG. 4.12 – Déplacement longitudinal solide et fluide sous la charge en profondeur fonction de la saturation du milieu pour le sol 4 (trait plein (solide) et tiret (fluide)), sol 5 (pointillés (solide) et tirets-pointillés (fluide)) et le sol 7 (pointillés courts (solide) et tirets courts (fluide)).

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des études bidimensionnelles variées menées à partir du code de calcul FAFEMO. Dans un premier temps, le code a été validé par deux exemples :

- ✓ un cas dégénéré à l'élastodynamique pour lequel il existe déjà un certain nombre de résultats bibliographiques,
- ✓ un cas de milieu biphasique sous l'hypothèse académique de compatibilité dynamique.

Par la suite, une analyse détaillée du comportement général d'un sol homogène biphasique a permis de mettre en évidence l'influence de tous les couplages du modèle de

Biot. Nous avons également visualisé la seconde onde de compression.

De plus, des extensions aux modélisations de milieux hétérogènes et de milieux partiellement saturés ont été envisagées. Les conclusions suivantes ont été obtenues :

- ✓ les deux phases solide et fluide réagissent différemment à la quantité d'hétérogénéités du milieu,
- ✓ l'influence de la saturation intervient sur les ondes primaires et non sur l'onde secondaire.

Chapitre 5

Calcul parallèle et résultats tridimensionnels

5.1 Introduction

Les résultats présentés dans le chapitre précédent correspondent à différents cas bi-dimensionnels. Il se pose alors naturellement la question de l'étude des problèmes tridimensionnels de façon à simuler numériquement le comportement mécanique d'un milieu à géométrie réelle. Ainsi, ce dernier chapitre a pour objectif de s'intéresser à des géométries en trois dimensions.

La modélisation du milieu et le maillage associé, ainsi que la formulation éléments finis, s'adaptent sans réelle difficulté aux cas tridimensionnels. Cependant, la problématique du régime transitoire en 3D nécessite à chaque pas de temps la résolution de systèmes différentiels numériques de plusieurs millions de degrés de liberté. Cette taille numérique importante devient alors hors de portée ou bien au-delà des capacités d'un ordinateur à un seul processeur résolvant séquentiellement le système global, même si cet ordinateur est doté d'un processeur performant et d'un espace mémoire important. Le blocage vient du manque de mémoire pour lire ou stocker les données, ou bien conduit à l'obtention d'un temps de calcul prohibitif.

L'idée de paralléliser le code de calcul FAFEMO afin d'utiliser les ressources informatiques d'un réseau d'ordinateurs, appelé par la suite supercalculateur, s'impose donc. Le calcul parallèle consiste effectivement à faire exécuter de manière simultanée, sur plusieurs processeurs, des séquences indépendantes d'un algorithme de résolution. Une ou plusieurs étapes de travail parallèle vient compléter le fil conducteur séquentiel du programme. Bien-entendu, il devient alors nécessaire de mettre en place une communication par échange de messages entre les processeurs, chacun stockant en mémoire une partie des données du système global.

La parallélisation d'un code de calcul peut se résumer ainsi :

- ✓ réalisation de tâches indépendantes effectuées simultanément sur les données par plusieurs processeurs,
- ✓ interaction entre plusieurs processeurs pour échanger de l'information, c'est-à-dire des paquets de données.

Le calcul parallèle permet ainsi d'effectuer des calculs plus volumineux et plus rapidement car d'une part, il réduit le délai d'obtention des résultats et d'autre part, l'espace mémoire disponible du supercalculateur est plus importante. Les problèmes, notamment en trois dimensions, hors de portée d'un monoprocesseur, deviennent alors raisonnablement accessibles.

Dans ce chapitre, nous présentons le travail de parallélisation effectué sur le code FA-FEMO. Une étude sur l'efficacité du calcul parallèle est menée sur deux supercalculateurs différents : le cluster Chœur du L3M à Marseille et le serveur SGI Origin 3800 du CINES à Montpellier. Enfin, des résultats tridimensionnels obtenus grâce à cette parallélisation sont présentés.

5.2 Qu'est-ce que le calcul parallèle ?

5.2.1 Les différents types de parallélisation

Les recherches sur la parallélisation de codes de calcul ont commencé au milieu des années 80 avec l'émergence des supercalculateurs. La création de la revue "Parallel Computing" en 1984 est l'illustration des débuts de ces recherches académiques.

Cependant, la parallélisation des codes de calculs n'a pas toujours été aisée et immédiate. En effet, un certain nombre d'outils spécifiques accessibles, comme les bibliothèques de transfert de données MPI, PVM, PARMAC, ont vu le jour progressivement dans les années 90. De plus, la quantité de travail nécessaire à l'adaptation des codes de calculs industriels vers des architectures de calculateurs parallèles a souvent ralenti cet effort, qui aurait pourtant permis une plus grande compétitivité. Ainsi, la Communauté Européenne a initié une étude au milieu des années 90 pour favoriser et dynamiser le développement du calcul parallèle et conclure que le gain à terme était bien réel.

Grâce à cette initiative, Stüben et al. [STU96] et Thole et Stüben [THO99], ont présenté un certain nombre d'études de cas allant de la mécanique des structures à l'électromagnétisme, en passant par la mécanique des fluides, la radiothérapie, ..., afin de montrer l'intérêt de paralléliser. Les auteurs listent également différents types de parallélisation existants :

- ✓ la parallélisation naturelle : certains algorithmes effectuent de nombreux calculs de manière indépendante pour ensuite être combinés afin d'obtenir une solution

globale. Ces algorithmes sont dits naturellement parallélisables. L'avantage est que les modifications dans le code de base séquentiel sont vraiment minimales.

- ✓ la parallélisation de modules spécifiques : lorsque la plus grande partie du temps de calcul est utilisée par des modules particuliers, une parallélisation de ces seuls modules permet d'obtenir un gain de temps intéressant. Cette approche est un bon compromis pour les codes de calculs volumineux.
- ✓ la décomposition en sous-domaines, encore appelée complément de Schur, consiste à diviser le domaine géométrique global en sous-domaines, chacun étant ensuite géré par un processeur. Une gestion des interfaces est alors à prendre en compte par une technique adaptée.
- ✓ la partition de grille consiste à diviser la grille en sous-grilles distribuées sur différents processeurs. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de gérer l'interface, comme dans la décomposition en sous-domaines. Par contre, cela nécessite l'introduction de communications appropriées. On reste alors proche du solveur initial, ce qui permet une implémentation plus immédiate.

Enfin, notons que la parallélisation permet d'aborder d'autres problèmes comme les problèmes non linéaires, plasticité par exemple, souvent coûteux numériquement.

5.2.2 Architectures de calculateurs parallèles

Deux architectures principales de supercalculateur existent aujourd'hui. Nous trouvons ainsi :

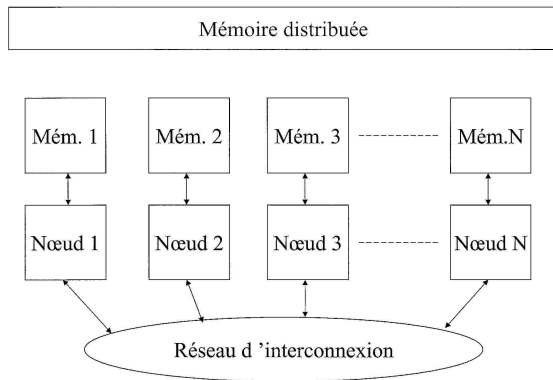


FIG. 5.1 – *Modèle d'un supercalculateur à mémoire distribuée, d'après "Le parallélisme au CINES avec MPI", [CINb].*

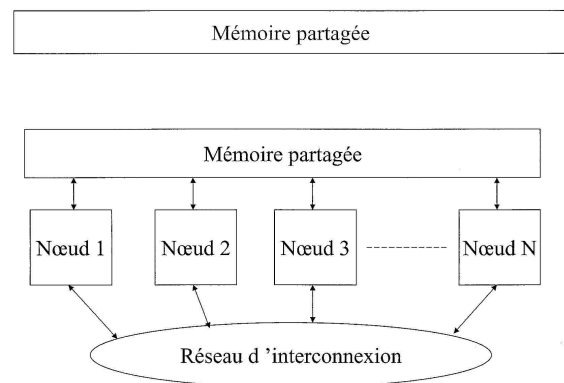


FIG. 5.2 – *Modèle d'un supercalculateur à mémoire partagée, d'après "Le parallélisme au CINES avec MPI", [CINb].*

- ✓ les supercalculateurs pour lesquels la mémoire est distribuée : chaque processeur du supercalculateur dispose de sa propre mémoire vive, non accessible aux autres

et possède ainsi une partie des données, cf. figure 5.1. Chaque processeur est donc une entité de calcul autonome possédant toutes les caractéristiques d'une machine séquentielle.

Précisons qu'un nœud sur les figures 5.1 et 5.2 correspond à une machine physique soit monoprocesseur soit plus généralement biprocesseur.

- ✓ les supercalculateurs pour lesquels la mémoire est partagée : tous les processeurs partagent un espace de mémoire unique et ont accès simultanément aux mêmes données, cf. figure 5.2.

Dans le cadre de ce travail, nous avons eu accès à deux supercalculateurs à mémoire distribuée pour le cluster Chœur, et distribuée mais virtuellement partagée pour le serveur SGI. Les caractéristiques techniques de ces supercalculateurs sont présentées dans la section 5.4.

5.2.3 Cadre des éléments finis

En ce qui concerne le calcul parallèle dans le cadre de l'étude de la propagation d'ondes en milieux poreux, nous n'avons pas trouvé de références bibliographiques. Nous nous proposons ici de présenter une revue succincte de ce qui existe en mécanique des structures, domaine qui se rapproche de celui qui nous concerne de par les méthodes numériques utilisées. La bibliographie présentée dans ce paragraphe est centrée sur les éléments finis.

Les méthodes les plus utilisées en mécanique des structures font appel à la décomposition en sous-domaines ou méthode du complément de Schur. Cette technique a été initiée pour résoudre des problèmes de plus grande échelle à l'aide d'ordinateurs à mémoire limitée, comme le soulignent par exemple Kocak et Akay [KOC01]. Dans la dernière décennie, de nombreuses variantes ont été développées et leurs performances mises en évidence. La majorité des travaux concerne la parallélisation des méthodes de résolution de systèmes linéaires de type $[K]\{u\} = \{f\}$, où $[K]$ est une matrice raideur. C'est le cas par exemple des recherches réalisées par Lirkov et Margenov [LIR99] et Lirkov [LIR03] dans le cadre des équations élastodynamiques linéarisées en régime permanent. La taille des problèmes peut atteindre un à deux millions de degrés de liberté.

Le domaine est le plus souvent décomposé en un nombre de sous-domaines égal au nombre de processeurs, mais on peut envisager un nombre de sous-domaines supérieur. Chaque processeur résout alors le problème qui lui incombe. Dans ce type d'approche, il est nécessaire de différencier les éléments internes au sous-domaine des éléments d'interface avec les autres sous-domaines qui s'influencent mutuellement.

Cette décomposition est couplée avec le préconditionnement de matrices par la méthode du gradient conjugué (PCG pour Preconditioned Conjugate Gradient) ou des variantes de cette méthode. En fait, plusieurs types d'approches peuvent être envisagés, Papadra-

kakis et Bitzarakis [PAP96] :

- ✓ la méthode du gradient conjugué est appliquée à la matrice globale,
- ✓ la méthode du gradient conjugué est appliquée aux coefficients de la matrice qui concernent les interfaces. Dans cette approche, on distingue les nœuds internes des nœuds d'interface. Le système initial est alors réduit uniquement aux degrés de liberté de l'interface. La matrice obtenue est plus spécifiquement appelée complément de Schur.

Des prolongements de ces travaux proposent des adaptations du préconditionnement des matrices, toujours avec la décomposition en sous-domaines, Bitzarakis et al. [BIT97], Papadrakakis et Fragakis [PAP01].

Plus récemment, Kim et Im [KIM03] comparent différentes techniques de préconditionnement couplées à la décomposition en sous-domaines et présentent un algorithme de parallélisation optimisant les transferts de données et donc les temps de communications. En fait, la parallélisation peut alors se situer à deux niveaux : d'une part, les matrices élémentaires de chaque sous-domaine sont construites en parallèle. D'autre part, à l'intérieur même de l'algorithme itératif de résolution, on peut effectuer un certain nombre de calculs en parallèle, comme des portions de produits scalaires et matriciels de chaque sous-domaine. L'article de Kim et Im précise par ailleurs que les méthodes itératives, de type méthode de résidu du gradient conjugué et variantes, se parallélisent plus facilement que les méthodes de résolution directes, de type élimination de Gauss. De plus, les méthodes directes nécessitent des transferts plus importants et donc des communications plus élevées. C'est ce qui explique la grande quantité de recherches effectuées sur les méthodes issues du complément de Schur.

Les articles de Fragakis et Papadrakakis, [FRA03] [FRA04], dressent un bilan et uniformisent les travaux effectués dans ce cadre. Ils mettent en relief les nombreux travaux réalisés par Farhat et al. [FAR00] sur les méthodes FETI (pour Finite element tearing and interconnecting), initiées par Farhat et Roux. Ces travaux forment la base d'une première famille de méthodes de décomposition sur lesquels s'appuient de nombreuses sources bibliographiques sur un domaine plus large que la mécanique des structures. Les auteurs soulignent également une autre famille de décomposition en sous-domaines appelée "balancing domain decomposition" (BDD).

Dans le cadre des charges transitoires, notons les recherches présentées par Vittoli et al. [VIT98]. Les auteurs abordent les phénomènes de transport miscible en milieux poreux. Là encore, le système linéaire est préconditionné par une variante du gradient conjugué, et une décomposition en sous-domaine particulière est utilisée. Enfin, citons Modak et Sotelino [MOD02] qui développent un code parallèle éléments finis orienté objet, permettant d'incorporer de nouveaux objets comme des algorithmes de résolution temporelle

diversifiés. Les applications visées concernent la dynamique linéaire ou non linéaire.

En résumé, dans tous ces travaux, une part importante du travail concerne le préconditionnement des matrices.

5.2.4 L'environnement de communication MPI

Nous avons parallélisé le code de calcul FAFEMO avec l'environnement de communication MPI, pour Message Passing Interface. MPI est une bibliothèque standard très utilisée permettant d'échanger des messages à l'intérieur du supercalculateur. Un message est constitué d'un paquet de données stockées dans une des différentes mémoires des p processeurs et le rôle de la bibliothèque MPI est d'en commander l'échange. Cette bibliothèque est standardisée et donc transportable, elle est reconnue par la quasi-totalité des supercalculateurs. Elle est performante et fiable, et enfin elle est d'utilisation simple car quelques fonctions basiques seulement sont utilisées dans la grande majorité des parallélisations. L'implémentation dans FAFEMO de la parallélisation avec MPI correspond à une taille en lignes C++ abordable rendant ainsi cette parallélisation claire, localisée aux endroits stratégiques du code et facilement accessible pour la maintenance et pour un éventuel développement ultérieur. De plus, un ensemble de fichiers spécifiquement dédié au calcul parallèle et séparé du code a été mis en place. Il est utilisé quel que soit le problème à résoudre, avec FAFEMO Mécanique ou bien avec d'autres développements de FAFEMO. L'ensemble du travail de parallélisation effectué est ainsi transposable à d'autres problèmes pour lesquels le code développé utilise la structure de FAFEMO, Urazov [URA03] et Bolvin et al. [BOL03].

Deux grands types de communication existent en MPI : d'une part, l'envoi de messages dit point à point uniquement entre deux processeurs et d'autre part la communication collective où l'information est envoyée à tous les processeurs à partir d'un seul.

Les fonctions basiques de la bibliothèque MPI les plus utilisées sont au nombre de sept :

- ✓ un programme MPI commence par un appel de la fonction `MPI_Init`. Cette fonction lance le programme de calcul.
- ✓ un programme MPI se termine par l'appel de la fonction `MPI_Finalize`. Cette opération est effective lorsque toutes les communications en cours ou en attente sont terminées.
- ✓ les fonctions `MPI_Comm_size` et `MPI_Comm_rank` sont utilisées pour savoir combien de processeurs participent au calcul et quel est leur positionnement. On peut également utiliser le groupe prédéfini `MPI_Comm_World` qui regroupe l'intégralité des processeurs.

- ✓ enfin, les deux fonctions `MPI_Send` et `MPI_Recv` permettent l'envoi et la réception d'un message pour des communications point à point. Pour les processus qui ne sont pas émetteurs, un buffer (mémoire tampon) sert à recevoir les données alors qu'en fonction émetteur, il contient les données à diffuser.
- ✓ les opérations de communications collectives font appel à la fonction `MPI_Bcast`.

De nombreuses sources d'informations traitent de la bibliothèque MPI : celles que nous avons utilisées sont issues de [CINa], [CINb], [IDR], [MPIa] et [MPIb]. Notons pour conclure que d'autres bibliothèques d'échange de messages existent. La plus connue après MPI, et la plus ancienne, est la bibliothèque PVM, pour Parallel Virtual Machine. Ce sont aujourd'hui les deux bibliothèques les plus utilisées pour effectuer du calcul parallèle haute performance.

5.3 Travail de parallélisation effectué sur le code FAFEMO

5.3.1 Où paralléliser le code FAFEMO ?

Avant de se lancer dans un processus de parallélisation d'un code de calcul, il faut se poser la question de l'utilité de cette opération : ainsi, tous les codes n'ont pas une structure permettant une parallélisation intéressante. Il existe des codes séries pour lesquelles la parallélisation n'engendre que des surcoûts de temps CPU à cause du ratio opérations sur communications très défavorable. Il apparaît que les codes gagnants à être parallélisés sont ceux pour lesquels le nombre de données indépendantes à traiter est élevé et localisé, ce qui permet l'utilisation d'un grand nombre de processeurs en parallèle.

Ainsi, dans un premier temps, nous étudions le programme série à paralléliser en posant les questions suivantes :

- ✓ tout d'abord des questions propres au code série :
 - quelles sont les tâches vraiment consommatrices de temps CPU ?
 - où sont-elles localisées dans le programme ?
 - quel est le besoin en taille mémoire, à savoir quelle est la taille des données à lire, à distribuer et à stocker ?
- ✓ ensuite des questions générées par une éventuelle parallélisation du code série :
 - quels sont le nombre et la taille des messages de communication générés par la parallélisation ?
 - quel est l'équilibrage des tâches parallèles entre les différents processeurs ?

L'utilitaire **gprof** sous Unix/Linux permet de tracer un profil du code série : passant le code en revue opération par opération, ce profil nous donne accès au temps passé sur chaque fonction, mettant ainsi en relief la ou les parties du code consommatrices en temps

de calcul CPU. La figure 5.3 présente les résultats obtenus à partir de notre programme bidimensionnel usuel. Les temps d'exécution sont présentés pour chacun des trois objets de FAFEMO.

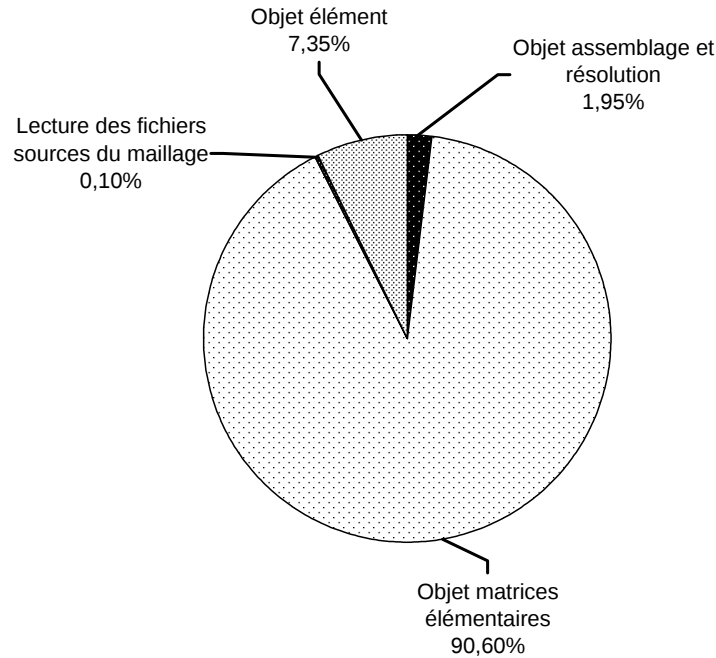


FIG. 5.3 – Répartition en pourcentage du temps total d'exécution du programme par objet.

Ainsi, l'objet matrices élémentaires apparaît clairement comme le consommateur principal, et de loin, du temps d'exécution global du programme. Si nous zoomons sur cet objet, nous obtenons le profil du temps d'exécution interne présenté sur la figure 5.4.

Par ailleurs, la matrice raideur élémentaire, la matrice masse élémentaire diagonale, le vecteur force élémentaire puis le vecteur résidu élémentaire sont successivement calculés pour chaque élément. Cette séquence de travail est englobée dans une boucle sur tous les éléments. Une séquence sur un élément i est donc indépendante de la même séquence sur un élément j .

La réponse à la question initialement posée est alors naturelle : la parallélisation doit s'effectuer au niveau de la boucle sur les éléments construisant les fonctions élémentaires précédentes. Nous répartissons entre p processeurs cette séquence de travail en distribuant les n éléments aux p processeurs. Notons de plus que la mémoire associée au partage en p morceaux est également répartie en p parts.

En résumé, les deux arguments synthétisés ci-dessous justifient notre choix :

- ✓ le temps d'exécution pour la construction des fonctions élémentaires est important par rapport aux autres séquences de calcul.

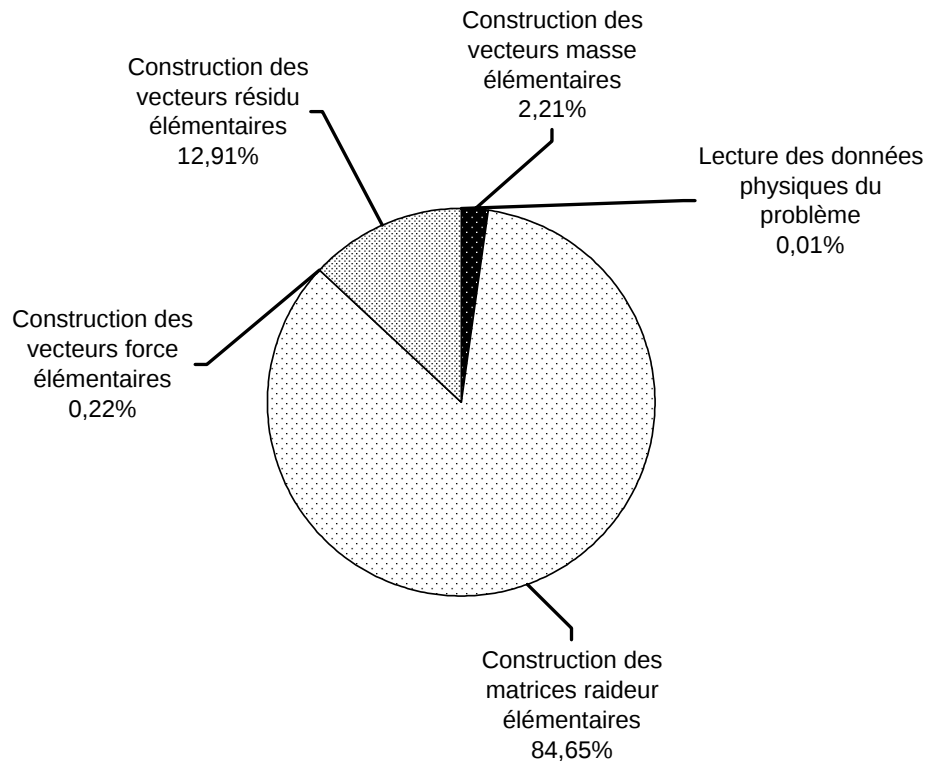


FIG. 5.4 – Répartition en pourcentage du temps d'exécution interne à l'objet matrice élémentaire.

- ✓ la boucle sur les éléments effectue des opérations indépendantes vis-à-vis des n éléments et est donc scindable en p morceaux équilibrés, de taille quasi-équivalente.

FAFEMO présente une structure permettant une parallélisation efficace et le gain attendu est réel, sous réserve des coûts en communication entre les processeurs.

5.3.2 Décomposition algébrique de la parallélisation

La parallélisation envisagée est effectuée de manière algébrique et non géométrique. Il s'agit d'une partition de grille, cf. paragraphe 5.2.1. La partition du travail entre les processeurs est en effet liée aux éléments et non à la géométrie du problème. Cette approche présente les avantages suivants :

- ✓ elle est simple car elle sépare la géométrie du problème de la parallélisation : aucun ajustement n'est nécessaire en cas de changement de géométrie. La parallélisation et la géométrie sont deux entités totalement indépendantes.
- ✓ nous utilisons un système AMS : la taille de la grille est évolutive. Une partition géométrique du problème pourrait engendrer pour des processeurs une absence de travail alors que d'autres, au moins aux temps faibles, travailleraient sans interruption. La balance de travail serait alors déséquilibrée et la prédiction du temps

d'exécution des calculs serait alors impossible. La partition algébrique, redistribuée à chaque pas de temps, répartit plus équitablement la part de la grille et permet en outre une estimation des temps d'exécution.

- ✓ enfin, en cas de raffinement de maillage, les zones géographiques peuvent présenter des différences de quantités d'éléments ce qui déséquilibrerait de nouveau la balance de travail entre les processeurs.

5.3.3 Parallélisation en un modèle SPMD

La parallélisation de FAFEMO correspond à un modèle SPMD, pour Single Program Multiple Data : il n'est effectivement pas nécessaire d'écrire un code différent, et un exécutable différent, pour chaque processeur, un seul et unique exécutable est utilisé. Chaque processeur exécute le même fichier source, mais traite des données différentes. Diverses fonctions de communication sont alors utilisées pour échanger les données entre les processeurs. Nous distinguons par la suite :

- ✓ un processeur principal dit processeur maître qui gère l'intégralité de l'exécution du code,
- ✓ $(p - 1)$ autres processeurs dits processeurs esclaves.

Le rôle supplémentaire du processeur maître est de lire et de distribuer les données, puis de les collecter après calcul de tous les processeurs avant de réactualiser le système global à chaque itération temporelle.

Notre modèle parallélisé SPMD peut se résumer grâce au schéma suivant :

```

Début
  Si(je_suis_processus_de_contrôle)
    Initialisation
  Pour i=1 à Nombre_processus -1
    Générer processus_i
    Envoyer(processus_i, travail_i)
  Tantque(non_fin_travail)
    Si (je_suis_processus_de_contrôle)
      {le processus de contrôle n'a pas besoin d'envoyer ses résultats}
      mes_résultats=calcul(mon_travail)
      Recevoir(résultats,n'importe_quel_processus)
    Sinon
      Recevoir(processus_de_contrôle,mon_travail)
      Mes_résultats=calcul(mon_travail)
      Envoyer(mes_résultats,processus_de_contrôle)
  Si(je_suis_processus_de_contrôle)
    Affichage_des_résultats
  Pour i=1 à Nombre_processus -1
    Terminer(processus_i)
Fin.

```

FIG. 5.5 – *Modèle SPMD du code FAFEMO parallélisé.*

5.4 Caractéristiques des supercalculateurs utilisés

5.4.1 Quelques résultats

Les résultats présentent le plus souvent le temps d'exécution en fonction du nombre de processeurs, voire du nombre d'éléments du problème étudié. Plus rarement, on trouve les courbes de speed-up ou d'efficacité. Ces termes permettant d'évaluer la performance de la parallélisation sont définis dans le paragraphe 5.5.1.

Kocak et Akay [KOC01] comparent les résultats obtenus sur différents systèmes d'exploitation : Unix, Linux et Windows. Les auteurs montrent que les propriétés de la plateforme de travail influent considérablement sur l'efficacité des algorithmes, et que par conséquent, des tests sur une unique plate-forme peuvent parfois conduire à des résultats irréalistes. Les propriétés des supercalculateurs doivent donc être spécifiées et étudiées attentivement.

Dans le cadre des équations élastodynamiques linéarisées, en régime permanent, Lirkov et al., [LIR99] [LIR03], utilisent la technologie MPI pour des essais sur des supercalculateurs à mémoire partagée. Les courbes de speed-up et d'efficacité montrent de bons résultats sur deux supercalculateurs de caractéristiques différentes.

Kulshreshtha et al., [KUL04] [KUL05], comparent les résultats obtenus sur différents supercalculateurs, un SGI Origin 3800, un cluster et un pentium III quadriprocesseurs. Les auteurs soulignent que le système cluster est attractif dans le sens où il est meilleur marché mais les vitesses de connection entre processeurs sont de type "goulet d'étranglement" et donnent des résultats moins efficaces que les autres systèmes. Par ailleurs, les auteurs soulignent que dans les problèmes abordés, il faut toujours trouver un compromis entre l'utilisation des communications et la mémoire nécessaire. Nous reviendrons sur ce point dans le cadre des travaux effectués sur FAFEMO.

En conclusion, les résultats bibliographiques montrent qu'il est essentiel de préciser les caractéristiques des supercalculateurs utilisés car elles permettent d'expliquer certaines tendances et l'existence de résultats différents d'un système à l'autre.

5.4.2 Cluster Chœur et serveur SGI Origin 3800

Tous les calculs parallèles ont été menés sur les deux supercalculateurs à mémoire respectivement distribuée et partagée dont les caractéristiques sont les suivantes :

- ✓ pour le cluster Chœur : installé au Laboratoire de Modélisation et Simulation Numérique en Mécanique et Génie des Procédés (L3M) de l'Université de la Méditerranée, Chœur est constitué de 27 nœuds biprocesseurs se répartissant en 2 nœuds gestionnaires et 25 nœuds de calcul. Les nœuds de calcul se scindent en deux groupes. Le premier groupe rassemble 19 nœuds constitués chacun de deux processeurs Athlon AMD-760MP 1800+ (1530 MHz par processeur, 1 Go DDR266 RAM

et disque dur de 40 Go IDE par nœud) interconnectés entre eux par un réseau gigabit ethernet. Ces nœuds sont appelés par la suite nœuds gigabit. Le second groupe est constitué de 6 nœuds biprocesseurs Athlon AMD-760MPX 1800+ présentant une carte mère et une carte réseau SCI/Dolphin rapides dont le bus PCI bat à 66 Mhz au lieu des 33 MHz (AMD-760MP) pour les cartes des nœuds gigabit. Ils sont appelés par la suite nœuds rapides. Enfin, les deux nœuds gestionnaires sont chacun des biprocesseurs Athlon AMD-760MPX (2000 MHz, 2 Gb DDR266 RAM, disque dur de 80 Go IDE) interconnectés par le réseau SCI rapide. Le système d'exploitation est Linux (Red Hat). Nous distinguons par la suite le cluster nœuds rapides du cluster nœuds gigabit.

- ✓ pour le CINES, Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur installé à Montpellier, nous avons eu accès au serveur SGI Origin 3800 (calculateur Silicon Graphics) constitué de 768 processeurs répartis sur 80 nœuds. Chaque processeur est un MIPS R14000 (500 MHz, 512 Mo RAM). La mémoire vive est en réalité physiquement distribuée mais virtuellement partagée. Chaque processeur dispose de 512 Mo RAM qui lui est physiquement rattachée, comme pour une architecture distribuée, mais il peut accéder par l'intermédiaire d'un réseau dédié et de manière tout à fait transparente pour l'utilisateur à la mémoire vive de chacun des autres processeurs. Il s'agit de fait d'une architecture partagée présentant 394 Go de mémoire disponible. Un espace disque dur externe rapide d'une taille de 1.6 To est partagé entre tous les processeurs. Le système d'exploitation est Unix (Irix).

Un système de gestion des travaux règle la file d'attente et le lancement des travaux en fonction de la durée et du nombre de processeurs demandés sur les deux sites.

5.5 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, nous cherchons à évaluer l'efficacité de la parallélisation effectuée. Après avoir défini les outils usuels de mesure de la qualité du calcul parallèle, nous essayons de tirer les principales caractéristiques de notre parallélisation. Nous étudions notamment l'influence du ratio opérations sur communications en fonction des différents supercalculateurs utilisés.

5.5.1 Outils de mesure de la qualité de la parallélisation

Les outils les plus couramment utilisés mesurant les performances d'un calcul parallèle en fonction du nombre de processeurs sont :

- ✓ le temps d'exécution $T(p)$ obtenu pour p processeurs en comparaison de celui obtenu sur un processeur $T(1)$.
- ✓ le speed-up qui s'écrit sous la forme :

$$S(p) = \frac{T(1)}{T(p)} \quad (5.1)$$

Il traduit le degré d'accélération des performances d'un code exécuté sur un processeur et sur p processeurs. La valeur idéale est p .

✓ l'efficacité de la parallélisation qui se définit par :

$$E(p) = \frac{S(p)}{p} \quad (5.2)$$

La valeur idéale de l'efficacité est bien-sûr de 1.

✓ enfin, le bon équilibrage de la répartition des tâches entre les p processeurs.

5.5.2 Principaux résultats obtenus

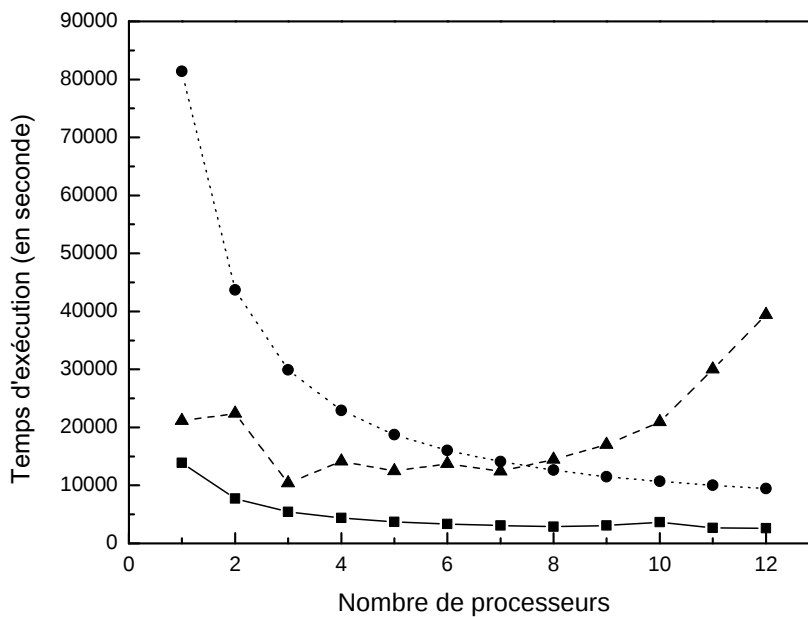


FIG. 5.6 – Temps d'exécution du code 2D parallélisé en fonction du nombre de processeurs pour différents supercalculateurs : cluster nœuds rapides (trait plein symboles carrés), cluster nœuds gigabit (tirets symboles triangulaires) et serveur SGI (pointillés symboles ronds).

L'objectif de ce paragraphe est de mesurer la performance de la parallélisation effectuée sur FAFEMO. Un nombre considérable d'essais est nécessaire pour étudier l'influence du nombre de processeurs et du supercalculateur utilisé : la durée d'un essai doit donc être accessible. Pour cette raison, nous présentons les résultats de la parallélisation avec la géométrie bidimensionnelle étudiée précédemment. Rappelons que le domaine

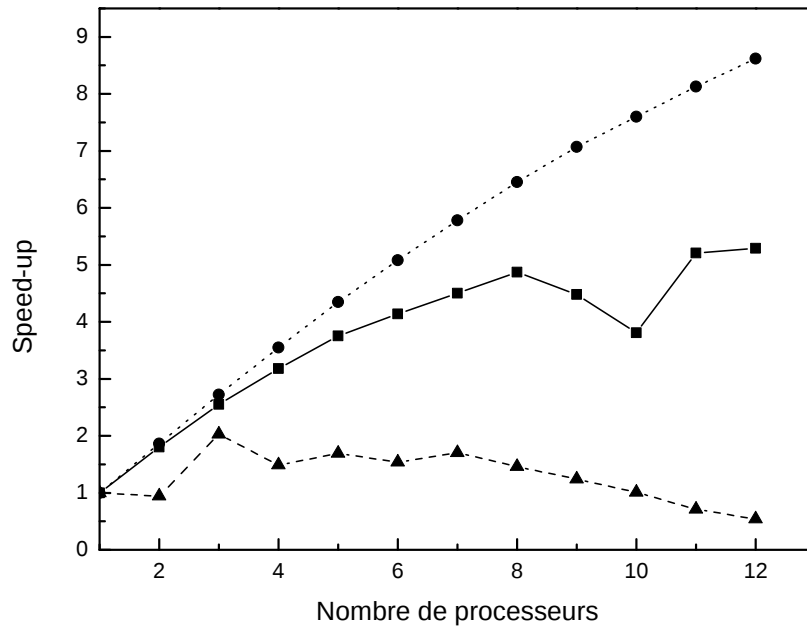


FIG. 5.7 – Speed-up du code 2D parallélisé en fonction du nombre de processeurs pour différents supercalculateurs : cluster nœuds rapides (trait plein symboles carrés), cluster nœuds gigabit (tirets symboles triangulaires) et serveur SGI (pointillés symboles ronds).

d'étude est partitionné en 50 626 éléments triangulaires avec 25 617 nœuds à 8 degrés de liberté, soit au total 204 936 degrés de liberté. La compilation du code a été réalisée avec les options de base. Des résultats 3D seront par ailleurs présentés dans la prochaine section.

Les temps d'exécution du code parallélisé sur le cluster Chœur nœuds rapides, sur le cluster Chœur nœuds gigabit et sur le serveur SGI sont présentés sur la figure 5.6. Les deux courbes respectivement de speed-up et d'efficacité pour ces trois configurations de supercalculateur sont présentées sur les figures 5.7 et 5.8.

De plus, le serveur SGI nous a permis de travailler avec un nombre plus important de processeurs que le cluster Chœur. Nous présentons respectivement sur les figures 5.9 et 5.10 le temps d'exécution ainsi que le speed-up obtenus jusqu'à un maximum de 64 processeurs.

L'ensemble de ces figures conduit aux conclusions suivantes :

- ✓ la tâche numérique est rendue plus rapide après parallélisation : le partage de cette tâche est globalement profitable au temps d'exécution. Les temps de communication, à faible nombre de processeurs, n'affecte pas la performance globale du code. Une exception est à noter cependant : pour deux processeurs sur le cluster nœuds gigabit, le surcoût de temps de communication rend le calcul légèrement plus long

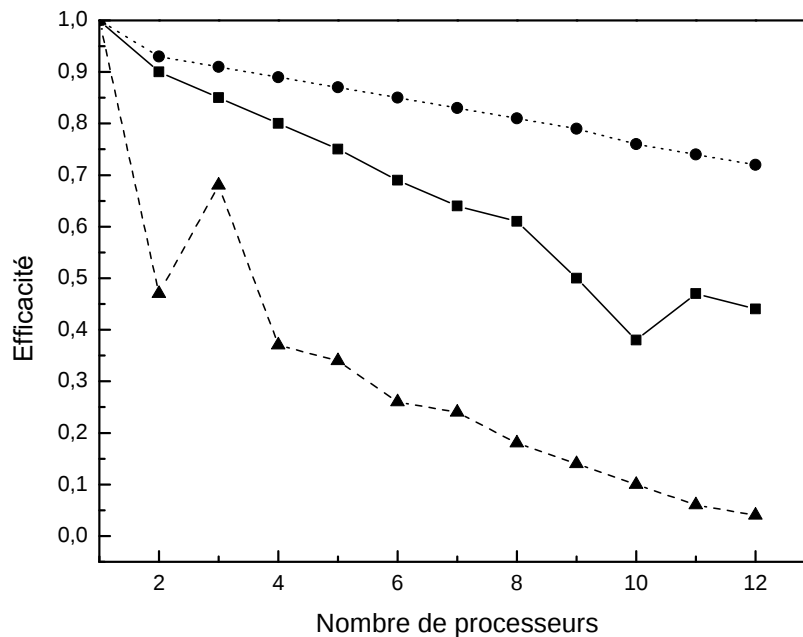


FIG. 5.8 – Efficacité du code 2D parallélisé en fonction du nombre de processeurs pour différents supercalculateurs : cluster nœuds rapides (trait plein symboles carrés), cluster nœuds gigabit (tirets symboles triangulaires) et serveur SGI (pointillés symboles ronds).

que sur un processeur, ce qui conduit à un speed-up inférieur à 1. La tendance s'inverse ensuite mais atteint vite sa limite, cf. figure 5.6.

- ✓ le temps d'exécution pour un processeur sur le serveur SGI est supérieur à celui obtenu sur le cluster nœuds gigabit. Le meilleur résultat correspond au cluster nœuds rapides, cf. figure 5.6.
- ✓ la courbe de speed-up est croissante sur une plus grande plage de processeurs sur le serveur SGI : alors que sur la figure 5.7, le maximum semble être atteint sur le cluster nœuds gigabit pour 3-4 processeurs, le maximum sur le serveur SGI se situe autour de 30 processeurs, cf. figure 5.10. Le temps d'exécution stagne néanmoins à partir de 14-16 processeurs sur le serveur SGI, cf. figure 5.9. Nous ne pouvons pas tirer de conclusion sur le cluster nœuds rapides car la limite des processeurs disponibles a été atteinte sans conduire à une conclusion nette.
- ✓ l'efficacité de la parallélisation, décroissante dans tous les cas, est meilleure sur le serveur SGI que sur le cluster nœuds rapides. Il apparaît de plus que l'efficacité est rapidement mauvaise sur le cluster nœuds gigabit, cf. figure 5.8.
- ✓ une certaine instabilité est à noter sur le cluster nœuds gigabit. Les résultats sont en effet très sensibles aux autres travaux en cours et à la charge globale de travail.

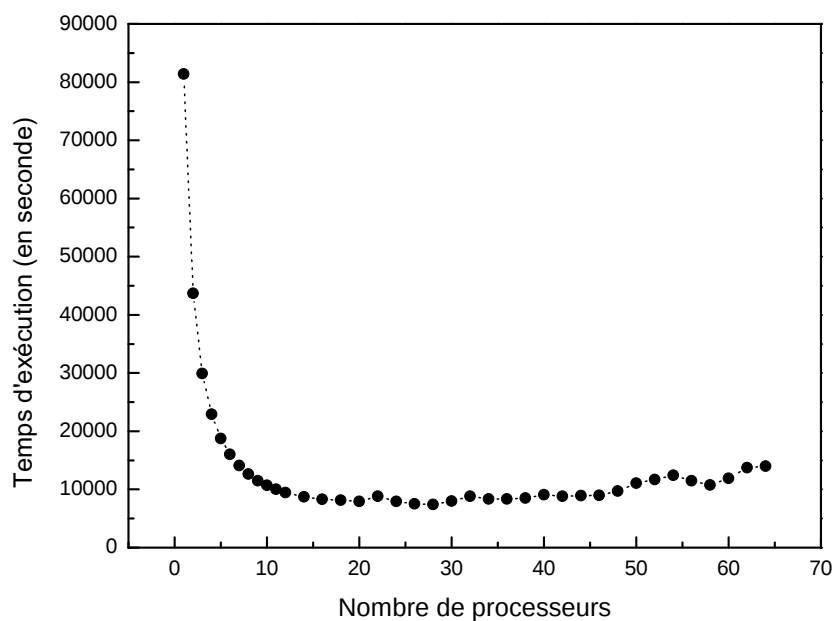


FIG. 5.9 – Temps d'exécution du code 2D parallélisé de 1 à 64 processeurs sur le serveur SGI.

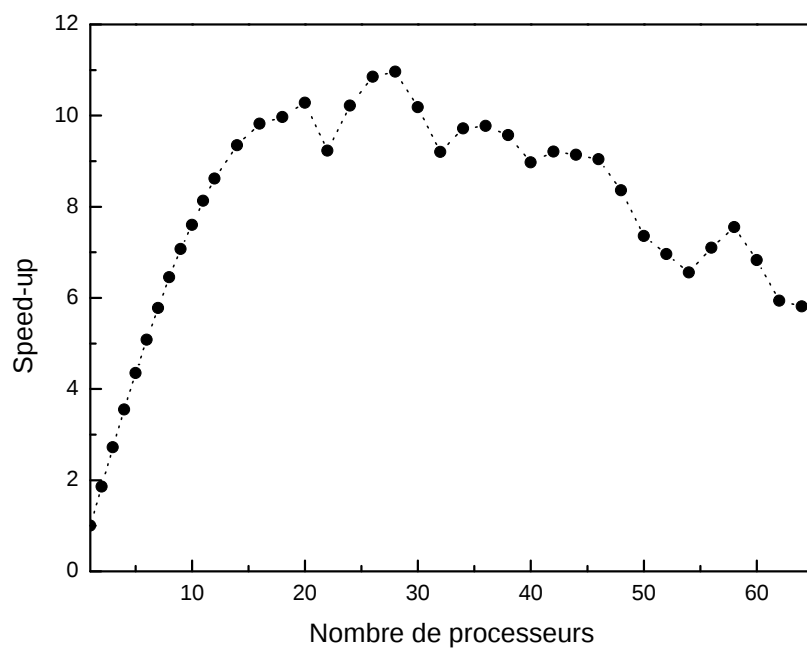


FIG. 5.10 – Speed-up du code 2D parallélisé de 1 à 64 processeurs sur le serveur SGI.

5.5.3 Répartition du temps d'exécution du programme parallèle

La forte différence de performance pour un processeur entre le serveur SGI et le cluster est liée à la différence de qualité des deux types de microprocesseurs. Plus exactement, la différence de cadence et de mémoire des microprocesseurs MIPS R14000 (SGI) et AMD-760MP (Cluster) justifie les résultats obtenus. La différence plus faible de performance entre les deux types de nœuds du cluster est justifiée par la différence de cadence du bus PCI de la carte mère.

En dehors de la qualité intrinsèque du processeur, le second facteur clef est la gestion de la communication entre les processeurs. Intéressons-nous alors à la répartition du temps CPU entre les tâches de communication et les tâches de calcul du code parallèle. Pour estimer le ratio global opérations sur communications et en conséquence justifier en partie les observations précédentes, nous avons placé différents chronomètres dans le code parallèle. Nous introduisons les différents temps mesurés suivants :

- ✓ $T(p)$ est le temps d'exécution du programme en calcul parallèle, p étant le nombre de processeurs utilisés.

La parallélisation de l'algorithme répartit le temps $T(p)$ de la façon suivante :

$$T(p) = S + \frac{P}{p} + T_{C1}(p) + T_{C2}(p) + A(p) \quad (5.3)$$

avec :

- ✓ S est le temps correspondant à la partie séquentielle, non parallélisée, qui existe déjà dans le code séquentiel. Cette partie est exécutée soit par tous les processeurs, soit par le processeur maître seulement. S est mesuré sur le processeur maître qui est celui qui effectue le plus d'opérations. Lorsqu'il est seul à travailler, les processeurs esclaves sont en attente. C'est le cas par exemple pour la lecture des fichiers sources de données.
- ✓ $\frac{P}{p}$ correspond à la partie parallélisée du code et exécutée par tous les processeurs. P est le temps d'exécution de cette partie dans le cas d'une exécution séquentielle du code.
- ✓ $T_{C1}(p)$ est le temps utilisé pour les communications point à point, soit les communications entre 2 processeurs uniquement. Les messages associés sont les MPI_Send ou MPI_Recv.
- ✓ $T_{C2}(p)$ est le temps utilisé pour les communications collectives, c'est-à-dire entre tous les processeurs. Bien que ce temps soit en général croissant avec le nombre de processeurs, il est avant tout fonction de la qualité de l'architecture de communication collective du supercalculateur.
- ✓ $A(p)$ correspond au temps additionnel émanant du calcul parallèle et qui n'existe pas en calcul séquentiel. C'est une fonction linéaire de p . En effet, les $p - 1$ séries

de données envoyées par les processeurs esclaves sont stockées dans une mémoire tampon ou buffer. Le processeur maître doit les additionner afin de construire le système global à chaque itération avant de vérifier la convergence temporelle. Cette opération supplémentaire, de nature strictement parallèle, est proportionnelle au produit entre les $p - 1$ processeurs esclaves et le nombre d'inconnues du système global.

Les figures 5.11, 5.12 et 5.13 fournissent de précieuses informations sur la répartition du temps d'exécution en calcul parallèle. Sur ces courbes, nous avons choisi une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées afin de mieux visualiser l'évolution des différents temps. Les enseignements à tirer de ces trois figures sont les suivants :

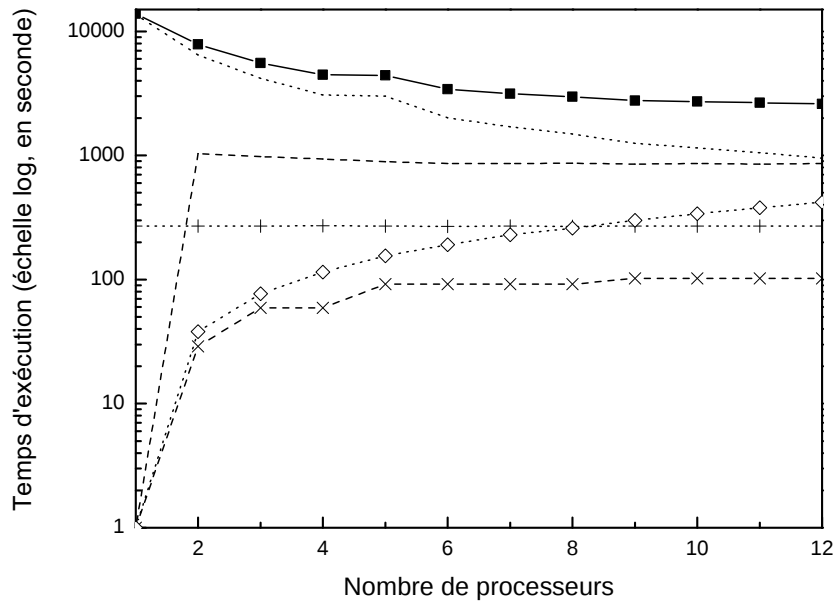


FIG. 5.11 – Répartition du temps d'exécution global (trait plein symboles carrés) entre les différentes tâches sur le cluster nœuds rapides : $\frac{P}{p}$ (pointillés), S (pointillés symboles +), A (pointillés symboles $\diamond$), $T_{C1}(p)$ (tirets), $T_{C2}(p)$ (tirets symboles $\times$).

- ✓ la communication point à point évolue différemment en fonction de l'architecture du supercalculateur. C'est la différence majeure entre le serveur SGI et le cluster nœuds gigabit. Dans le premier cas, le temps T_{C1} décroît lorsque le nombre de processeurs croît et dans le second cas, c'est la tendance inverse qui est observée. Pour le cluster nœuds rapides, le temps T_{C1} est quasi-stable.
- pour le serveur SGI, il faut revenir sur l'architecture partagée du serveur pour expliquer les résultats obtenus : en effet, SGI Origin 3800 présente une mémoire partagée et accessible par tous les processeurs. Néanmoins, cette mémoire est

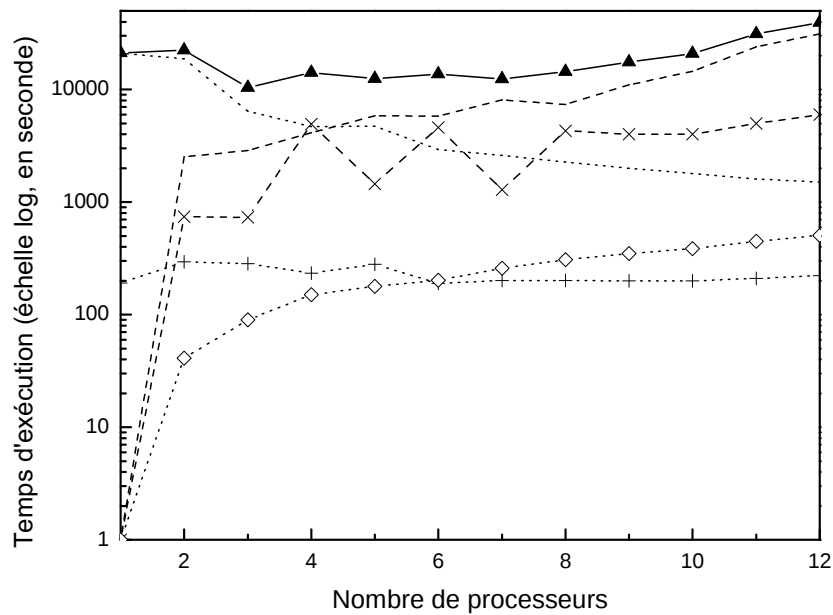


FIG. 5.12 – Répartition du temps d'exécution global (trait plein symboles triangulaires) entre les différentes tâches sur le cluster nœuds gigabit : $\frac{P}{p}$ (pointillés), S (pointillés symboles +), A (pointillés symboles ◇), $T_{C1}(p)$ (tirets), $T_{C2}(p)$ (tirets symboles ×).

organisée de façon hiérarchique : l'accès aux données est différent selon que les données sont présentes dans la mémoire dite locale, physiquement attachée au processeur, ou non. L'architecture se caractérise par l'appellation NUMA pour "non-uniform memory access", à savoir "accès non-uniforme à la mémoire". Il faut donc garder à l'esprit qu'au-delà de certains seuils (mémoire cache, mémoire locale puis mémoire globale), les temps d'accès sont différents et augmentent au fur et à mesure de l'éloignement des données dans la mémoire.

Ainsi, pour un faible nombre de processeurs, les paquets de données sont importants et occupent donc des zones mémoires éloignées : l'accès aux données par le maître est relativement lent. Plus le nombre de processeurs augmentent, plus les paquets de données sont petits, plus ils sont stockés dans les mémoires locales d'accès plus rapide et plus la communication avec le maître est en conséquence rapide : le temps de communication devient un temps d'accès mémoire. C'est à ce niveau que le gain est obtenu : ainsi, l'architecture partagée du serveur SGI justifie la décroissance des temps de communication point à point en fonction du nombre de processeurs, cf. figure 5.13.

- pour le cluster, l'explication se trouve au niveau des performances des cartes de communication. Il faut alors distinguer les deux types de cartes Gigabit et SCI/Dolphin.

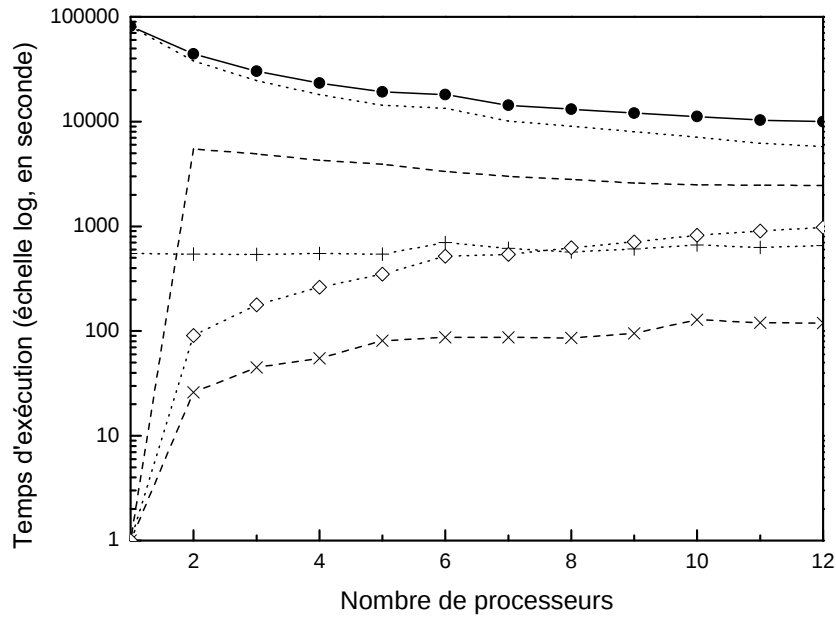


FIG. 5.13 – Répartition du temps d'exécution global (trait plein symboles ronds) entre les différentes tâches sur le serveur SGI Origin 3800 : $\frac{P}{p}$ (pointillés), S (pointillés symboles +), A (pointillés symboles $\diamond$), $T_{C1}(p)$ (tirets), $T_{C2}(p)$ (tirets symboles $\times$).

Les nœuds gigabit sont reliés par un réseau externe : celui-ci assure en théorie un débit de l'ordre du Gigabit mais il se révèle en pratique plus limité. De plus, chaque carte de communication a un temps de latence important de l'ordre de la milliseconde. La bande passante des données est très vite atteinte, ce qui justifie que dans cette configuration, le temps T_{C1} est une fonction croissante du nombre de processeurs, cf. figure 5.12. La croissance devient même exponentielle au-delà d'une dizaine de processeurs : pour 12 processeurs par exemple, 80 % du temps d'exécution est consommé par la communication.

Les cartes SCI sont beaucoup plus adaptées au calcul avec communications : effectivement, elles sont directement reliées entre elles, sans réseau externe, avec un débit de 2,5 Gigabit. Les temps de latence sont très faibles, de l'ordre de la microseconde, et le bus PCI est plus performant que sur la carte gigabit. La bibliothèque MPI est de plus très performante sur ces cartes. Notons enfin que la bande passante des données n'est pas saturée mais que c'est la cadence de transfert des données qui limite la rapidité de la communication. Dans cette configuration, les résultats obtenus sont bons, les performances de la carte réseau le justifient, et le temps T_{C1} est une fonction quasi-constante du nombre de processeurs, cf. figure 5.11.

Le mode de communication est ainsi primordial pour expliquer les résultats ob-

tenus. En fonction de l'architecture du supercalculateur, les paramètres clefs sont différents : pour une machine à mémoire distribuée, il faut opter pour le réseau de communication le plus rapide et le plus large possible. Pour une machine à mémoire partagée, il faut pouvoir avoir accès localement à une grande quantité de mémoire vive.

C'est pour ces raisons que les deux courbes d'efficacité sur le serveur SGI et sur le cluster nœud rapides sont bonnes, cf. figure 5.8. Notons pour conclure que, comme le type de processeur sur le serveur SGI est moins performant que sur le cluster, l'efficacité et le speed-up propres au serveur SGI s'en trouvent améliorés. Le temps passé à calculer reste alors plus longtemps prépondérant par rapport au temps de communication.

- ✓ la communication collective est également fortement pénalisée par le réseau gigabit ethernet. Elle consomme en moyenne 20 à 60 fois plus de temps que sur le réseau du serveur SGI ou sur le réseau interne SCI rapide du cluster. Ce point est particulièrement pénalisant et montre de nouveau l'importance de la qualité de la plate-forme de travail.
- ✓ le temps de communication additionnel $A(p)$ croît effectivement dans tous les cas car le travail supplémentaire augmente avec le nombre de processeurs, la taille globale des données à gérer augmentant. Le temps S correspondant à la partie séquentielle est stable et le temps $\frac{P}{p}$ correspondant à la partie parallélisée du code diminue lorsque le nombre de processeurs croît : ces trois résultats sont sans surprise.

Ainsi pour être efficace, la parallélisation nécessite l'utilisation d'une part de processeurs performants pour diminuer le temps de calcul propre à chaque processeur et d'autre part d'un réseau de communication rapide.

En définitive, le meilleur compromis que nous avons trouvé dans le cadre de la parallélisation de FAFEMO correspond au cluster nœuds rapides : sa configuration cumule effectivement les deux qualités précédentes.

5.6 Résultats tridimensionnels

Dans la section précédente, nous avons montré que la parallélisation effectuée sur FAFEMO est efficace sur une géométrie bidimensionnelle. Nous proposons maintenant d'exploiter cette version du code afin d'obtenir une première série de résultats pour des cas tridimensionnels.

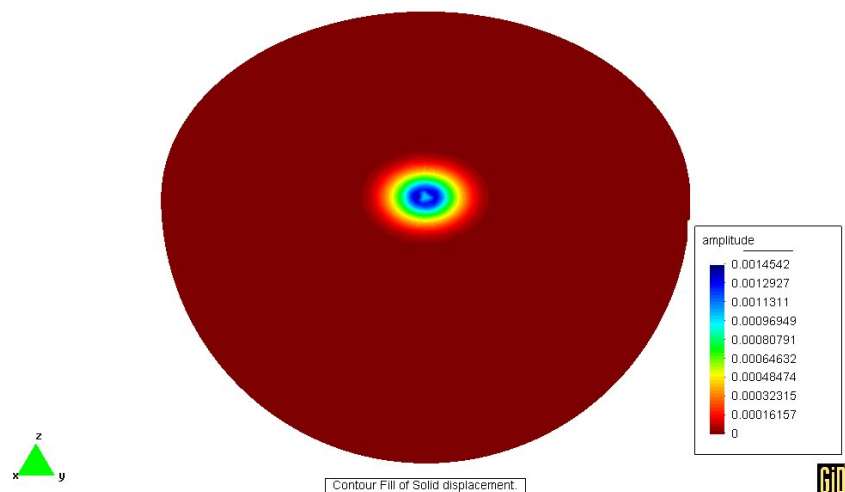
La géométrie utilisée et les caractéristiques du problème sont présentées dans la section 8 du chapitre 1. Nous rappelons ici que nous utilisons un maillage avec 1 092 562 éléments tétraédriques et 192 897 nœuds présentant 12 degrés de liberté, soit au total un problème à 2 314 764 degrés de liberté. L'étude est menée sur un sol dur présentant un faible couplage visqueux. La valeur adimensionnée du coefficient de perméabilité hydraulique choisi est donc de $K = 0.65$ ($K = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}$).

Du fait de la taille du problème, nous avons choisi de travailler sur le serveur SGI 3800 qui offre un nombre de processeurs important. Le calcul a été lancé avec 32 processeurs et a consommé une centaine d'heures par processeur pour une durée adimensionnée de 0.75. Le pas de temps adimensionnel de l'algorithme temporel est de $2.5 \cdot 10^{-4}$ et conduit à une convergence en deux itérations.

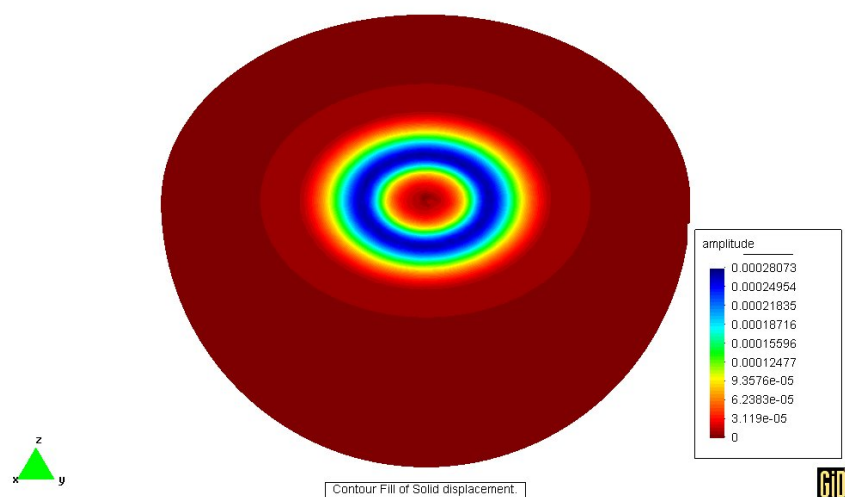
Les figures 5.14 (a) (b) et (c) présentent les déplacements solides en surface du massif pour différentes valeurs de temps et permettent de visualiser la progression sphérique de la propagation des fronts d'onde. La localisation des fronts d'onde est en accord avec les valeurs attendues. Par ailleurs, on peut noter la décroissance géométrique des amplitudes au fur et à mesure de la propagation. L'analyse du comportement de la phase fluide et l'étude temporelle de points isolés rejoignent également les conclusions de l'étude bidimensionnelle.

Dans un deuxième temps, les figures 5.15 (a) (b) et (c) présentent une coupe des déplacements solides en profondeur du massif pour les mêmes valeurs de temps : ces figures sont les analogues de celles présentées en 2D, chapitre 4 section 4. Nous rejoignons les conclusions obtenues alors : la contribution de l'onde de Rayleigh est concentrée près de la surface, la visualisation des ondes volumiques est conforme aux résultats attendus en termes de propagation et de contribution énergétique.

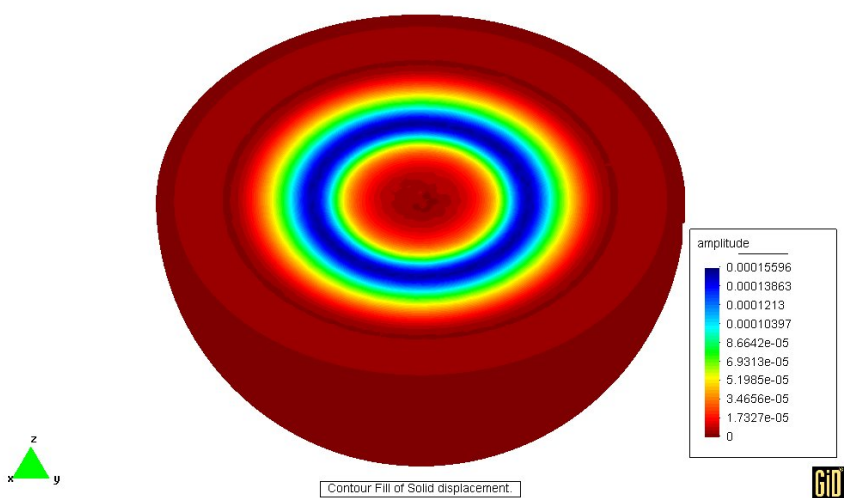
Les résultats présentés dans cette section ont été limités à un cas de sol homogène faiblement couplé. Nous pouvons désormais envisager d'autres études. Un dossier de demande de ressources informatiques au CINES, spécifiquement dédié au calcul tridimensionnel, sera déposé à l'automne 2005.



(a) Cartographie en surface à un instant $t = 0.25$

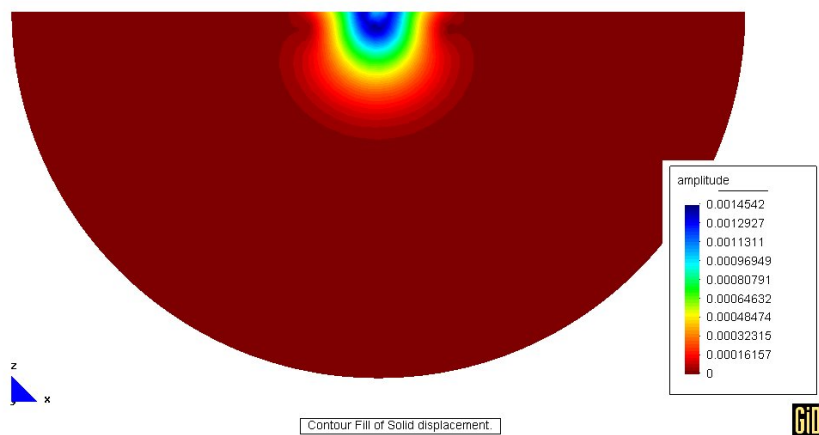


(b) Cartographie en surface à un instant $t = 0.50$

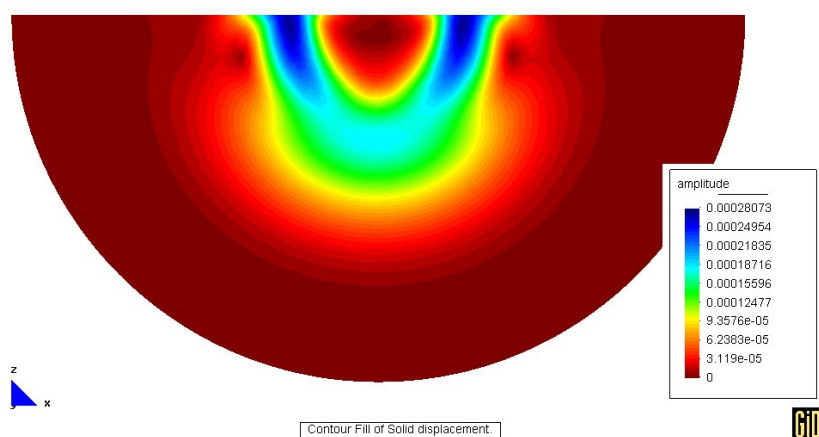


(c) Cartographie en surface à un instant $t = 0.75$

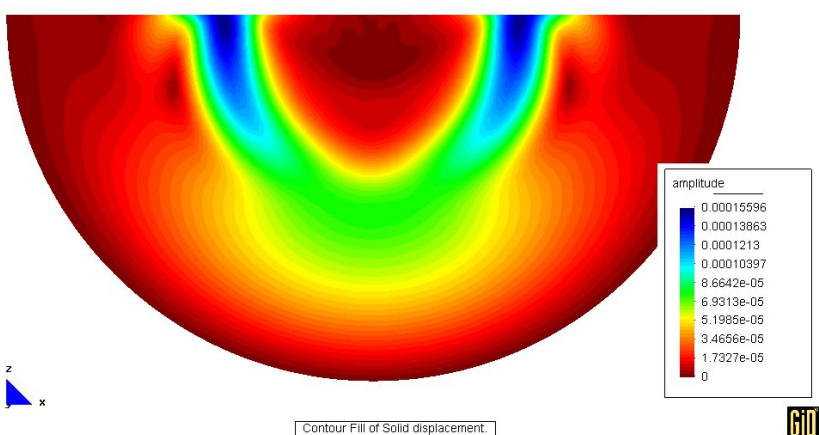
FIG. 5.14 – Isodéplacements solides en surface du sol.



(a) Cartographie en profondeur à un instant $t = 0.25$



(b) Cartographie en profondeur à un instant $t = 0.50$



(c) Cartographie en profondeur à un instant $t = 0.75$

FIG. 5.15 – Isodéplacements solides en profondeur.

5.7 Perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté le travail de parallélisation effectué sur le code FAFEMO. Des essais bidimensionnels sur différents supercalculateurs ont montré l'efficacité du calcul parallèle.

Ce travail a permis d'effectuer une première étude en trois dimensions et ouvre des perspectives intéressantes tant du point de vue de l'amélioration de l'outil numérique que de l'analyse et de l'exploitation de résultats physiques tridimensionnels.

Ainsi, en vue de minimiser les communications et d'effectuer les calculs plus rapidement, les points suivants peuvent être explorés :

- ✓ une approche compressée des communications : dans la version actuelle, les données transférées comportent des vecteurs de même dimension. Or chaque processeur n'est concerné que par une partie des vecteurs, l'autre partie étant initialisée avec des zéros. Le transfert des données est de fait pénalisé. Dans une version future, nous envisageons de réduire la communication à la portion non nulle,
- ✓ un recouvrement des communications par des calculs,
- ✓ l'accès à un cluster plus étendu présentant au moins les caractéristiques du cluster nœuds rapides du L3M.

Enfin, dans le cadre de l'évolution d'outils numériques de calcul haute performance, notons que les choix de développements futurs seront fortement dépendants des avancées technologiques des systèmes informatiques.

Conclusions et Perspectives

L'objectif de ce travail était d'étudier numériquement la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux continu biphasique en régime impulsionnel et d'analyser le comportement de ces différentes ondes dans le domaine temporel.

Une analyse bibliographique préliminaire a permis d'établir un bilan des résultats existants et a montré la nécessité de mener une étude complémentaire à l'échelle macroscopique sur le modèle complet poreux biphasique. Les difficultés majeures recensées lors de l'étude des régimes transitoires sont liées aux instabilités numériques des modélisations issues de la théorie de Biot, même lorsque l'étude ne prend pas en compte l'intégralité des couplages mécaniques. D'autre part, le temps de calcul pénalisant et l'espace mémoire nécessaire important sont souvent soulignés.

Une première approche semi-analytique en régime harmonique a permis de déterminer les vitesses de propagation des différentes ondes et d'appréhender les conséquences des phénomènes de dispersion et d'atténuation lors de l'étude des régimes transitoires. Le comportement de l'onde de compression de seconde espèce a notamment pu être expliqué.

La contribution majeure de cette étude concerne la mise au point d'un code de calcul permettant de simuler et d'analyser le comportement mécanique d'un massif poreux semi-infini en régime impulsionnel. Une approche par éléments finis en déplacements solide et fluide a été développée. La structure orientée objet donne un code compact et souple. Une gestion optimisée du temps de calcul CPU et de la mémoire nécessaire est proposée. La technique matrix-free est assistée d'un système expert pour le choix de la grille.

A partir des approches précédentes, nous avons obtenu et analysé un certain nombre de résultats. Les déplacements des phases solide et fluide en surface et en profondeur du milieu poreux continu biphasique ont ainsi été présentés dans les configurations bidimensionnelles suivantes : sol homogène faiblement ou fortement couplé, sol hétérogène, sol partiellement saturé. L'analyse a été complétée par la visualisation de cartographies du massif.

Malgré l'efficacité du code FAFEMO, l'étude numérique pour des cas tridimensionnels est difficile à envisager sans utiliser les ressources d'un réseau d'ordinateurs. Ainsi, le

dernier travail présenté dans ce mémoire concerne la parallélisation du code. Des essais sur différents supercalculateurs ont été réalisés afin de mesurer l'efficacité du calcul parallèle. Un premier ensemble de résultats tridimensionnels a été obtenu.

En ce qui concerne les développements futurs, nous souhaitons souligner les points suivants :

- ✓ du point de vue physique, la prise en compte de la non saturation du sol apparaît intéressante compte tenu des résultats du chapitre 4. L'air, modélisé soit en tant que troisième phase à part entière soit par des bulles mélangées au fluide majoritaire, est un paramètre influent important : une étude approfondie permettant d'isoler son influence sur la réponse du sol est à mener. Par ailleurs, l'accès à la pression fluide, en plus du déplacement fluide, peut être envisagé, soit directement, soit à l'aide d'une nouvelle formulation éléments finis.
- ✓ de plus, une approche expérimentale permettrait de confronter nos résultats à la réalité du terrain et d'apporter des améliorations aux différentes modélisations. Dans cette optique, une collaboration avec des laboratoires expérimentaux travaillant sur l'étude de la propagation des ondes dans les milieux poreux est à prévoir. Le problème inverse permettant de remonter aux caractéristiques du milieu poreux devra alors être envisagé.
- ✓ du point de vue numérique, le calcul parallèle offre de larges perspectives. L'évolution de ce travail liée aux avancées technologiques est à suivre, notamment sur le choix des supercalculateurs les plus adaptés à notre problématique. De plus, la gestion de la communication peut être optimisée comme nous l'avons précisé dans le chapitre 5. Par ailleurs, en dehors du calcul parallèle, un changement de l'outil de résolution numérique de FAFEMO permettant d'appréhender directement, sans perdre la précision et la stabilité du code actuel, un système du deuxième ordre en temps peut être une piste à étudier.

Bibliographie

- [AK02] AL-KHOURY R., KASBERGEN C., SCARPAS A., ET BLAAUWENDRAAD J., “Poroelastic spectral element for wave propagation and parameter identification in multi-layer systems”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 4073–4091, 2002.
- [AKB93] AKBAR N., DVORKIN J., ET NUR A., “Relating P-wave attenuation to permeability”, *Geophysics*, Vol. 58, No. 1, pp. 20–29, 1993.
- [ATA98] ATALLA N., PANNETON R., ET DEBERGUE P., “A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 104, No. 3, pp. 1444–1452, 1998.
- [AUR80] AURIAULT J., “Dynamic behaviour of a porous medium saturated by a newtonian fluid”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 18, pp. 775–785, 1980.
- [AUR85] AURIAULT J., BORNE L., ET CHAMBON R., “Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 77, No. 5, pp. 1641–1650, 1985.
- [BER80] BERRYMAN J. ET WANG H., “Elastic wave propagation and attenuation in a double porosity dual permeability medium”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 37, pp. 63–78, 1980.
- [BIO41] BIOT M., “General theory of three-dimensional consolidation”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 12, pp. 155–164, 1941.
- [BIO55] BIOT M., “Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, No. 2, pp. 182–185, 1955.
- [BIO56a] BIOT M., “Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I- Low-frequency range”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 28, No. 2, pp. 168–178, 1956.
- [BIO56b] BIOT M., “Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II- Higher frequency range”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 28, No. 2, pp. 179–191, 1956.
- [BIO56c] BIOT M., “Theory of the deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 27, No. 5, pp. 459–467, 1956.

- [BIO62a] BIOT M., “Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 34, No. 9, pp. 1254–1264, 1962.
- [BIO62b] BIOT M., “Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 33, No. 4, pp. 1482–1498, 1962.
- [BIT97] BITZARAKIS S., PAPADRAKAKIS M., ET KOTSOPULOS A., “Parallel solution techniques in computational structural mechanics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 148, pp. 75–104, 1997.
- [BOL03] BOLVIN H., CHAMBAREL A., FOUGÈRE D., ET GLADIKH P., “Optimization of the communications between processors in a general parallel computing approach using the selected data technique”, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 2763, pp. 185–196, 2003.
- [BOU86] BOURBIÉ T., COUSSY O., ET ZINSZNER R., *Acoustique des milieux poreux*. Ed. Technip Paris, Publications de l’Institut Français du Pétrole, 1986.
- [BRA00] BRADFORD S. ET KATOPODES N., “The anti-dissipative, non-monotone behavior of Petrov-Galerkin upwinding”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 33, pp. 583–608, 2000.
- [BUR81] BURRIDGE R. ET KELLER J., “Poroelasticity equations derived from microstructure”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 70, No. 4, pp. 1140–1146, 1981.
- [CHA00] CHAMBAREL A. ET FERRY E., “Finite element formulation for Maxwell’s equations with space dependent electric properties”, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 9, No. 8, pp. 941–967, 2000.
- [CHE94a] CHEN J., “Time domain fundamental solution to Biot’s complete equations of dynamic poroelasticity. Part I : two-dimensionnal solution”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, No. 10, pp. 1447–1490, 1994.
- [CHE94b] CHEN J., “Time domain fundamental solution to Biot’s complete equations of dynamic poroelasticity. Part II : three-dimensionnal solution”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, No. 2, pp. 169–202, 1994.
- [CINa] CINES, “Le parallélisme au CINES avec MPI, mode d’emploi, support de cours du CINES”, [http ://www.cines.fr/textes/Cinesmpiemploi.pdf](http://www.cines.fr/textes/Cinesmpiemploi.pdf).
- [CINb] CINES, “Le parallélisme au CINES avec MPI, support de cours du CINES”, [http ://www.cines.fr/textes/Cinesmpi.pdf](http://www.cines.fr/textes/Cinesmpi.pdf).
- [COU91] COUSSY O., *Mécanique des milieux poreux*. Ed. Technip Paris, 1991.
- [COU98] COUSSY O., DORMIEUX L., ET DETOURNAY E., “From mixture theory to Biot’s approach for porous media”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 34-35, pp. 4619–4635, 1998.
- [CRO97] CROUZEIX M. ET MIGNOT A., *Analyse numérique des équations différentielles*. Ed. Masson Paris, 1997.

- [DAU99] DAUCHEZ N., *Etude vibroacoustique des matériaux poreux par éléments finis*. Thèse, Université du Maine, France, 1999.
- [DAU01] DAUCHEZ N., SAHRAOUI S., ET ATALLA N., “Convergence of poro-elastic finite elements based on Biot displacement formulation”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 109, pp. 33–40, 2001.
- [DAU03] DAUCHEZ N., SAHRAOUI S., ET ATALLA N., “Investigation and modelling of damping in a plate with bonded porous layer”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 265, pp. 437–449, 2003.
- [DEG98] DEGRANDE G., ROECK G. D., BROECK P. V. D., ET SMEULDERS D., “Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 34-35, pp. 4753–4778, 1998.
- [DHA84] DHATT G. ET TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Ed. Maloine S.A, Collection Université de Compiène, 1984.
- [DOR02] DORMIEUX L. ET BOURGEOIS E., *Introduction à la micromécanique des milieux poreux*. Ed. Presse de l’École Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [DVO93] DVORKIN J. ET NUR A., “Dynamic poroelasticity : a unified model with the squirt and the Biot mechanisms”, *Geophysics*, Vol. 58, No. 4, pp. 524–533, 1993.
- [FAR00] FARHAT C., PIERSON K., ET LESOINNE M., “The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 184, pp. 333–374, 2000.
- [FER01] FERRONATO M., GAMBOLATI G., ET TEATINI P., “Ill-conditioning of finite element poroelasticity equations”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 5995–6014, 2001.
- [FRA03] FRAGAKIS Y. ET PAPADRAKAKIS M., “The mosaic of high performance domain decomposition methods for structural mechanics : formulation, interrelation and numerical efficiency of primal and dual methods”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, pp. 3799–3830, 2003.
- [FRA04] FRAGAKIS Y. ET PAPADRAKAKIS M., “The mosaic of high performance domain decomposition methods for structural mechanics - Part II : formulation enhancements, multiple right-hand sides and implicit dynamics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 4611–4662, 2004.
- [GAJ94] GAJO A., SAETTA A., ET VITALIANI R., “Evaluation of three and two field finite element methods for the dynamic response of saturated soil”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 1231–1247, 1994.

- [GAJ95] GAJO A. ET MONGIOVI L., “An analytical solution for the transient response of saturated linear elastic porous media”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 19, pp. 399–413, 1995.
- [GAM01] GAMBOLATI G., PINI G., ET FERRONATO M., “Numerical performance of projection methods in finite element consolidation models”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 25, pp. 1429–1447, 2001.
- [GAT05a] GATMIRI B. ET JABBARI E., “Time-domain Green’s functions for unsaturated soils. Part I : Two-dimensional solution”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. In press, 2005.
- [GAT05b] GATMIRI B. ET JABBARI E., “Time-domain Green’s functions for unsaturated soils. Part II : Three-dimensional solution”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. In press, 2005.
- [GHA72] GHABOUSSI J. ET WILSON E., “Variational formulation of dynamics of fluid-saturated porous elastic solids”, dans *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, pp. 947–962, 1972.
- [GOR95] GORANSSON P., “A weighted residual formulation of the acoustic wave propagation through a flexible porous material and comparison with a limp material model”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 182, No. 3, pp. 479–494, 1995.
- [GOR98] GORANSSON P., “A 3-D symmetric, finite element formulation of the Biot equations with application to acoustic wave propagation through an elastic porous medium”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, pp. 167–192, 1998.
- [GRA75] GRAFF K., *Wave motion in elastic solids*. Oxford Engineering Science Series, Clarendon Press Oxford, 1975.
- [HAN98] HAN Q., WANG S., ET CHEN X., “Simulation of 3D wave using Biot theory : a 1D finite element algorithm”, *68th Meeting of Society of Exploration Geophysicists, SEG, New-Orleans, Expanded Abstract, septembre 1998*, 1998.
- [HOR01] HORLIN N., NORDSTROM M., ET GORANSSON P., “A 3D hierarchical FE formulation of Biot’s equation for elasto-acoustic modelling of porous media”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, No. 4, pp. 633–652, 2001.
- [HOR05] HORLIN N., “3D hierarchical hp-FEM applied to elasto-acoustic modelling of layered porous media”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 285, pp. 341–363, 2005.
- [IDR] IDRIS, “Parallélisation, supports de cours à l’IDRIS”, [http ://www-idris.fr/docs/docu/supportcours](http://www-idris.fr/docs/docu/supportcours).
- [JEN00] JENG D. ET LIN Y., “Poroelastic analysis of the wave-seabed interaction problem”, *Computers and Geotechnics*, Vol. 26, pp. 43–64, 2000.

- [JON91] JONES D. ET PETYT M., “Ground vibration in the vicinity of a strip load : A two-dimensional half-space model”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 147, pp. 155–166, 1991.
- [JON93] JONES D. ET PETYT M., “Ground vibration in the vicinity of a rectangular load on a half-space”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166, No. 1, pp. 141–159, 1993.
- [JON98] JONES D., LEHOUEDEC D., ET PETYT M., “Ground vibrations due to a rectangular harmonic load”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, No. 1, pp. 61–74, 1998.
- [KHA99] KHALILI N., YAZDCHI M., ET VALLIAPPAN S., “Wave propagation analysis of two-phase saturated porous media using coupled finite-infinite element method”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 18, pp. 533–553, 1999.
- [KIM03] KIM S. ET IM Y., “Parallel processing of 3D rigid-viscoplastic finite element analysis using domain decomposition and modified block Jacobi preconditioning technique”, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 134, pp. 254–264, 2003.
- [KOC01] KOCAK S. ET AKAY H., “Parallel Schur complement method for large-scale systems on distributed memory computers”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 25, pp. 873–886, 2001.
- [KUL04] KULSHRESHTHA K., NATARAJ N., ET JUNG M., “Performance of a parallel mixed finite element implementation for fourth order clamped anisotropic plate bending problems in distributed memory environments”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 155, pp. 753–777, 2004.
- [KUL05] KULSHRESHTHA K. ET NATARAJ N., “A parallel mixed finite element implementation for approximation of eigenvalues and eigenvectors of fourth-order eigenvalue problems”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 285, pp. 1242–1254, 2005.
- [LEH95] LEHOUEDEC D., *Couplage Sols-Structures*. Cours de troisième année, Ecole Centrale de Nantes, 1995.
- [LI03] LI X., HAN X., ET PASTOR M., “An iterative stabilized fractional step algorithm for finite element analysis in saturated soil dynamics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, pp. 3845–3859, 2003.
- [LIR99] LIRKOV I. ET MARGENOV S., “MPI parallel implementation of CBF preconditioning for 3D elasticity problems”, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 50, pp. 247–254, 1999.
- [LIR03] LIRKOV I., “MPI solver for 3D elasticity problems”, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 61, pp. 509–516, 2003.

- [LM99] LEFEUVE-MESGOUEZ G., *Propagation d'ondes dans un massif soumis à des charges se déplaçant à vitesse constante*. Thèse, Université de Nantes, France, 1999.
- [LM00] LEFEUVE-MESGOUEZ G., LEHOUEDEC D., ET PELOW A., "Ground vibration in the vicinity of a high speed moving harmonic strip load", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 231, No. 5, pp. 1289–1309, 2000.
- [MES05a] MESGOUEZ A., LEFEUVE-MESGOUEZ G., ET CHAMBAREL A., "Numerical approach of Biot's equations for transient regimes : study of mechanical couplings", dans *Structural Dynamics, EUROLYN 05*, In press Ed. Balkema, European Association for Structural Dynamics, 4-7 Septembre 2005.
- [MES05b] MESGOUEZ A., LEFEUVE-MESGOUEZ G., ET CHAMBAREL A., "Simulation of transient mechanical wave propagation in heterogeneous soils", *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 3514, pp. 647–654, 2005.
- [MES05c] MESGOUEZ A., LEFEUVE-MESGOUEZ G., ET CHAMBAREL A., "Transient mechanical wave propagation in semi-infinite porous media using a finite element approach", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. In press, 2005.
- [MOD02] MODAK S. ET SOTELINO E., "An object-oriented programming framework for the parallel dynamic analysis of structures", *Computers and Structures*, Vol. 80, pp. 77–84, 2002.
- [MPIa] MPI, "The Message Passing Interface Forum", <http://www.mpi-forum.org>.
- [MPIb] MPI, "The Message Passing Interface (MPI) standard", <http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi>.
- [PAN96] PANNETON R., *Modélisation numérique tridimensionnelle par éléments finis des milieux poroélastiques*. Thèse, Université de Sherbrooke, Canada, 1996.
- [PAP96] PAPADRAKAKIS M. ET BITZARAKIS S., "Domain decomposition PCG methods for serial and parallel processing", *Advances in Engineering Software*, Vol. 25, pp. 291–307, 1996.
- [PAP01] PAPADRAKAKIS M. ET FRAGAKIS Y., "An integrated geometric-algebraic method for solving semi-definite problems in structural mechanics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 6513–6532, 2001.
- [PLO80] PLONA T., "Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies", *Applied Physics Letters*, Vol. 36, No. 4, pp. 259–261, 1980.
- [PRE82] PREVOST J., "Nonlinear transient phenomena in saturated porous media", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 30, No. 1, pp. 3–18, 1982.

- [SCH01] SCHANZ M., “Application of 3D time domain boundary element formulation to wave propagation in poroelastic solids”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 25, pp. 363–376, 2001.
- [SIM84] SIMON B., ZIENKIEWICZ O., ET PAUL D., “An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 8, pp. 381–398, 1984.
- [SIM86a] SIMON B., WU J., ET ZIENKIEWICZ O., “Evaluation of higher order, mixed and hermitean finite element procedures for dynamic analysis of saturated porous media using one-dimensional models”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 10, pp. 483–499, 1986.
- [SIM86b] SIMON B., WU J., ZIENKIEWICZ O., ET PAUL D., “Evaluation of u-w and u- π finite element methods for the dynamic response of saturated porous media using one-dimensional models”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 10, pp. 461–482, 1986.
- [SME92] SMEULDERS D., ROSETTE J. D. L., ET DONGEN M. V., “Waves in partially saturated porous media”, *Transport in Porous Media*, Vol. 9, pp. 25–37, 1992.
- [STU96] STUBEN K., MIERENDORFF H., THOLE C., ET THOMAS O., “Industrial parallel computing with real codes”, *Parallel Computing*, Vol. 22, pp. 725–737, 1996.
- [TER98] TERADA K., ITO T., ET KIKUCHI N., “Characterization of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 153, pp. 223–257, 1998.
- [THO99] THOLE C. ET STUBEN K., “Industrial simulation on parallel computers”, *Parallel Computing*, Vol. 25, pp. 2015–2037, 1999.
- [UMN05] UMNova O., ATTENBOROUGH K., SHIN H., ET CUMMINGS A., “Deduction of tortuosity and porosity from acoustic reflection and transmission measurements on thick samples of rigid-porous materials”, *Applied Acoustics*, Vol. 66, pp. 607–624, 2005.
- [URA03] URAZOV A., *General parallelization schemes of finite element method*. Technical report, Université d’Avignon et des pays de Vaucluse, France, et Université de Novosibirsk, Russie, 2003.
- [VAU83] VAUCLIN M., “Méthodes d’étude de la variabilité spatiale des propriétés d’un sol”, dans *les Colloques de l’INRA : variabilité spatiale des processus de transfert dans les sols*, Vol. 15, Ed. INRA Publ., pp. 9–43, 1983.
- [VER69] VERRUIJT A., *Elastic storage of aquifers in Flow trough porous media*. Ed. De Weist, Academic Press INC New York and London, 1969.

- [VIT98] VITTOLO C., WILDERS P., MANZINI M., ET FOTIA G., “Distributed parallel computation of 2D miscible transport with multi-domain implicit time integration”, *Simulation Practice and Theory*, Vol. 6, pp. 71–88, 1998.
- [YAN00] YANG J., “Influence of water saturation on horizontal and vertical motion at a porous soil interface induced by incident P wave”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 19, pp. 575–581, 2000.
- [YAN01] YANG J., “Saturation effects on horizontal and vertical motions in a layered soil-bedrock system due to inclined SV waves”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 21, pp. 527–536, 2001.
- [ZHA05] ZHAO C., LI W., ET WANG J., “An explicit finite element method for Biot dynamic formulation in fluid-saturated porous media and its application to a rigid foundation”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 282, pp. 1169–1181, 2005.
- [ZHO03] ZHOU X., WANG J., ET LU J., “Transient dynamic response of poroelastic medium subjected to impulsive loading”, *Computers and Geotechnics*, Vol. 30, pp. 109–120, 2003.
- [ZIE80] ZIENKIEWICZ O., CHANG C., ET BETTESS P., “Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils”, *Geotechnique*, Vol. 30, No. 4, pp. 385–395, 1980.
- [ZIE84] ZIENKIEWICZ O. ET SHIOMI T., “Dynamic behaviour of saturated porous media : the generalized Biot formulation and its numerical solution”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 8, pp. 71–96, 1984.