

# Prise en compte des “courants de London” dans la modélisation des supraconducteurs (\*)

Alain Bossavit (\*\*)

EDF, 1 avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart, France

(Reçu le 27 mars 1997, accepté le 24 juin 1997)

PACS 02.60.Lj – Ordinary and partial differential equations; boundary value problems

PACS.74.60.Ec – Mixed state, critical fields and surface sheath

**Abstract.** — A model is given, in variational form, in which volumic “Bean currents”, ruled by Bean’s law, and surface “London currents” coexist. This macroscopic model generalizes Bean’s one, by appending to the critical density  $j_c$  a second parameter, with the dimension of a length, similar to London’s depth  $\lambda$ . The one-dimensional version of the model is investigated, in order to link this parameter with the standard observable  $H-M$  characteristics

**Résumé.** — On propose un modèle, sous forme variationnelle, associant des “courants de Bean” volumiques, décrits par la loi de Bean, et des “courants de London”, surfaciques. Ce modèle macroscopique généralise celui de Bean, caractérisé par le courant critique  $j_c$ , et fait intervenir un second paramètre, homogène à une longueur, analogue au  $\lambda$  de London. La version unidimensionnelle du modèle est étudiée en détail de manière à relier ce paramètre à l’observation des caractéristiques  $H-M$  usuelles.

## 1. Introduction

Dans beaucoup de travaux numériques récents [8, 10, 12, 14], on traite les supraconducteurs comme des “matériaux de Bean”, c’est-à-dire, selon une généralisation naturelle du modèle de Bean [2], comme des conducteurs où densité de courant  $\mathbf{j}$  et champ électrique  $\mathbf{e}$  sont parallèles, leurs modules étant reliés par une loi non-linéaire telle que celle de la figure 1, caractérisée par un “courant critique”  $j_c$ , fonction de la température, et qui peut de plus dépendre de l’intensité locale du champ  $\mathbf{h}$ . Voir [3] pour la théorie de cette méthode.

Malgré les succès de cette modélisation, et la facilité de calcul qu’elle permet (en dimension 2, il s’agit du “problème de Stefan” classique [11], pour lequel on dispose de méthodes très efficaces [13]), elle a le défaut de ne pas tenir compte des courants de surface (dûs à d’autres mécanismes que la dérive des vortex, qui est à la base du modèle de Bean), qu’on ne peut pas négliger en pratique. La “loi de London” (5) ci-dessous est un des modèles possibles pour ces courants.

---

(\*) Le contenu de cet article a été présenté à Numelec 97

(\*\*) e-mail : Alain.Bossavit@der.edf.fr

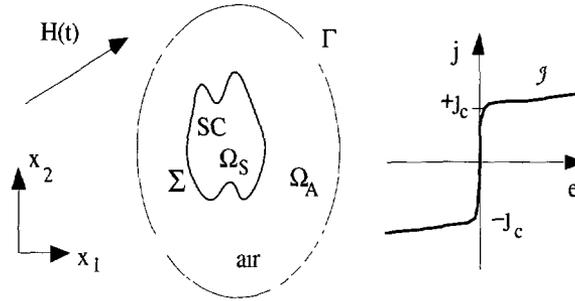


Fig. 1. — La situation, et la loi  $j-e$  dans  $\Omega_S$ . Courants selon  $x_3$ .  
 [Situation, and  $j-e$  law in  $\Omega_S$ . Currents are along  $x_3$ .]

Le but de cet article est de donner une formulation variationnelle du problème où puissent coexister “courants de Bean” (intérieurs, régis par la loi de Bean) et “courants de London” (superficiels). Il en résulte immédiatement un schéma numérique utilisable. La formulation a un sens en dimension 3, mais on se limitera à la dimension 2 (courants parallèles, champ transverse), et à un seul conducteur pour l’essentiel de cet exposé.

Rappelons le modèle avec loi de Bean généralisée dans ce cas (Fig. 1). On a  $\mathbf{j} = \{0, 0, j\}$ , où la 3<sup>e</sup> composante  $j$  ne dépend pas de  $x_3$ , et de même,  $\mathbf{e} = \{0, 0, e\}$ . Le domaine de calcul  $\Omega$ , de frontière  $\Gamma$ , dans le plan  $x_1-x_2$ , est la réunion de l’air  $\Omega_A$ , du supraconducteur  $\Omega_S$  et de l’interface  $\Sigma$ . La formulation “forte” est

$$\partial_t j - \operatorname{div}(\mu_0^{-1} \operatorname{grad} e) = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\mu_0^{-1} \partial_n e = \partial_t H_{\text{tang}} \text{ sur } \Gamma, \tag{2}$$

où  $H_{\text{tang}}$  est la projection tangentielle (dans le sens direct) du champ appliqué  $H(t)$  sur  $\Gamma$ , avec la loi de comportement

$$j = \mathcal{J}(e) \text{ dans } \Omega_S, \quad j = 0 \text{ dans } \Omega_A, \tag{3}$$

où  $\mathcal{J}$  est une fonction impaire monotone (Fig. 1, à droite).

Pour en avoir une formulation faible (après quoi la discrétisation par éléments finis est sans problème), on note  $E$  l’espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  et on demande, pour  $t \geq 0$  et  $H(t)$  donné, de trouver  $e \in E$  tel que  $\mathcal{J}(e) = 0$  à  $t = 0$  et

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathcal{J}(e) e' + \int_{\Omega} \mu_0^{-1} \operatorname{grad} e \cdot \operatorname{grad} e' = \int_{\Gamma} \partial_t H_{\text{tang}} e' \tag{4}$$

pour tout  $e'$  dans  $E$  et  $t \geq 0$ . Selon que la circulation de  $H(t)$  le long de  $\Gamma$  est nulle ou non, on peut traiter soit le problème des courants induits par un champ horizontal parasite, soit le problème de la répartition des courants de transport, avec la même formulation et le même code.

Les courants de London n’existent de toute façon que dans une épaisseur de l’ordre de  $\lambda$  (la profondeur de London [9], celle qui figure dans (5) ci-dessous, de l’ordre de 0,1 à 1  $\mu\text{m}$ ), en général très inférieure à la taille des éléments finis. en tenir compte suppose qu’on ajoute au modèle (3)(4) quelque terme de surface. Mais de plus, il y aura alors une discontinuité de  $e$

au passage de  $\Sigma$ , donc il faut agrandir l'espace  $E$ . Pour voir de quelle façon, on commencera par un modèle mixte, associant modèle de Bean en profondeur et loi de London dans une couche superficielle, et on fera ensuite tendre l'épaisseur de celle-ci vers 0 en même temps que le paramètre de London, d'où un modèle limite (Sect. 2). On verra ensuite comment la valeur *effective* de l'épaisseur intervient dans les résultats, de manière à pouvoir la relier à l'observation (Sect. 3), et on donnera quelques indications sur le passage à la dimension 3.

"Courants de Bean" et "courants de London" sont bien entendu des fictions, correspondant à des moyennes spatiales des supercourants responsables de la supraconductivité. La terminologie n'est pas fixée. Les "courants de London" de cet article sont les "courants de Meissner" de [6], par exemple. Pour d'autres auteurs, "courants de Meissner" semble désigner tous les courants responsables de l'expulsion du champ magnétique hors du conducteur (effet Meissner). Je remercie l'un des lecteurs de sa suggestion d'appeler "courant de Bean" la moyenne macroscopique (non nulle dans l'état mixte) des supercourants *internes*.

## 2. Association de London et Bean, et modèle limite

On rappelle que la loi de London s'écrit

$$\mu_0 \lambda^2 \partial_t \mathbf{j} = \mathbf{e}, \tag{5}$$

et ceci, combiné avec la loi de Faraday  $\mu_0 \partial_t \mathbf{h} + \text{rot } \mathbf{e} = \mathbf{0}$  et la relation d'Ampère  $\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}$ , donne  $\mathbf{e} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{e} = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire, dans le présent contexte,

$$e - \lambda^2 \Delta e = 0. \tag{6}$$

Supposons donc (Fig. 2) l'interface  $\Sigma$  entourée d'une couche  $\Omega_L$  d'épaisseur  $2\delta$ , avec  $\delta$  du même ordre que  $\lambda$ , où (6) remplace (3). Appelons  $\Omega_S$  et  $\Omega_A$  (avec  $\delta$  sous-entendu) ce qui reste de supra et d'air à l'intérieur et à l'extérieur de cette couche. Dans cette situation modifiée, (4) devient

$$\int_{\Omega_S} \partial_t \mathcal{J}(e) e' + \int_{\Omega} \mu_0^{-1} \text{grad } e \cdot \text{grad } e' + \lambda^{-2} \int_{\Omega_L} \mu_0^{-1} e e' = \int_{\Gamma} \partial_t H_{\text{tang}} e' \quad \forall e' \in E. \tag{7}$$

On vérifie en effet que ceci assure (6) en prenant  $e'$  à support dans  $\Omega_L$  et en intégrant par parties.

Or si l'on désigne par  $E^L$  le sous-espace de  $E$  constitué par les champs  $e$  qui vérifient (6) dans  $\Omega_L$ , c'est-à-dire qui vérifient

$$\int_{\Omega_L} \mu_0^{-1} \text{grad } e \cdot \text{grad } e' + \lambda^{-2} \int_{\Omega_L} \mu_0^{-1} e e' = 0$$

pour tout  $e'$  à support dans  $\Omega_L$  (noter que  $E^L$  est bien fermé dans  $E$ , comme il se doit), on a, pour  $e'$  cette fois dans  $E^L$ ,

$$\int_{\Omega_L} \mu_0^{-1} \text{grad } e \cdot \text{grad } e' + \lambda^{-2} \int_{\Omega_L} \mu_0^{-1} e e' = \mu_0^{-1} \int_{\partial\Omega_L} \partial_n e e', \tag{8}$$

de sorte que le problème se réécrit trouver  $e \in E^L$  tel que  $\mathcal{J}(e) = 0$  à  $t = 0$  et

$$\int_{\Omega_S} \partial_t \mathcal{J}(e) e' + \int_{\Omega_S \cup \Omega_L} \mu_0^{-1} \text{grad } e \cdot \text{grad } e' + \mu_0^{-1} \int_{\partial\Omega_L} \partial_n e e' = \int_{\Gamma} \partial_t H_{\text{tang}} e' \quad \forall e' \in E^L.$$

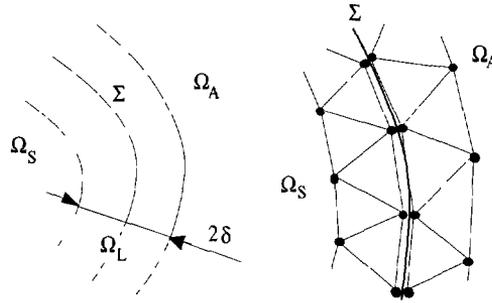


Fig. 2. — Agrandissement de  $\Omega_S$  par une couche “de London”  $\Omega_L$  d’épaisseur  $2\delta$  (à g.), et dédoublement des DdL sur  $\Sigma$  (à d.).

[Enlarging  $\Omega_S$  by a “London layer”  $\Omega_L$  of width  $2\delta$  (left), and doubling of degrees of freedom on  $\Sigma$  (right).]

Il ne reste alors qu’à passer à la limite selon  $\delta$  et  $\lambda$ , en maintenant constant le rapport  $k = \delta/\lambda$ . Notons, dans la situation actuelle ( $\delta$  et  $\lambda$  petits, mais finis),  $\{e\} + [e]/2$  et  $\{e\} - [e]/2$ , respectivement, les traces de  $e$  sur les frontières interne et externe de  $\Omega_L$  (de sorte que  $\{e\}$  est leur moyenne et  $[e]$  leur différence, de l’intérieur vers l’extérieur). On considère  $\{e\}$  et  $[e]$  comme des fonctions définies sur  $\Sigma$ . On va s’appuyer sur le résultat suivant :

**Proposition 1 :** *On a, pour  $\delta$  petit, et en négligeant des termes d’ordre supérieur en  $\delta$ .*

$$\int_{\partial\Omega_L} \partial_n e e' \approx \lambda^{-1}(\gamma\{e\}\{e'\} + \gamma^{-1}[e][e']), \tag{9}$$

où  $\gamma = 2 \operatorname{th}(\delta/\lambda) \equiv 2 \operatorname{th}k$ .

*Démonstration :* On obtient  $\int_{\partial\Omega_L} \partial_n e e'$  en résolvant l’équation (6) dans  $\Omega_L$  avec  $e$  donné sur  $\partial\Omega_L$ , c’est-à-dire  $\{e\}$  et  $[e]$  donnés. Pour cela, on adopte un système de coordonnées où la ligne médiane  $\Sigma$  correspond à  $x = 0$  et les deux bords  $\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_A$  et  $\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_S$  à  $x = \delta$  et  $-\delta$ . On néglige les dérivées dans le sens des  $y$ . La solution à  $y$  donné est approximativement celle de l’équation différentielle  $e(x) - \lambda^2 \partial_{xx} e = 0$ , avec les conditions aux limites  $e(\pm\delta) = \{e\} \pm [e]/2$  (fonction de  $y$ ), c’est-à-dire

$$e(x) = \{e\}(\operatorname{ch} \lambda^{-1}x)/\operatorname{ch}(\lambda^{-1}\delta) + \frac{1}{2}[e](\operatorname{sh} \lambda^{-1}x)/\operatorname{sh}(\lambda^{-1}\delta), \tag{10}$$

d’où

$$\lambda \partial_x e(x) = \{e\}(\operatorname{sh} \lambda^{-1}x)/\operatorname{ch}(\lambda^{-1}\delta) + \frac{1}{2}[e](\operatorname{ch} \lambda^{-1}x)/\operatorname{sh}(\lambda^{-1}\delta),$$

et donc (avec  $k = \delta/\lambda$ )

$$\mu_0^{-1} \partial_x e(\pm\delta) e'(\pm\delta) = (\lambda\mu_0)^{-1}(\pm\{e\} \operatorname{th} k + \frac{1}{2}[e] \operatorname{coth} k)(\{e'\} \pm \frac{1}{2}[e'])$$

d’où, posant  $\gamma = 2 \operatorname{th} k \equiv 2 \operatorname{th}(\delta/\lambda)$ ,

$$\mu_0^{-1}(\partial_x e(\delta) e'(\delta) - \partial_x e(-\delta) e'(-\delta)) = \gamma\{e\}\{e'\} + \gamma^{-1}[e][e'],$$

d’où (9) en intégrant ceci sur  $\Sigma$ .

Passant à la limite, on aboutit à la formulation suivante : trouver  $e \in E^+$  tel que  $\mathcal{J}(e) = 0$  à l'instant 0 et

$$\int_{\Omega_S} \partial_t \mathcal{J}(e) e' + \int_{\Omega} \mu_0^{-1} \text{grad } e \cdot \text{grad } e' + (\lambda \mu_0)^{-1} \int_{\Sigma} (\gamma \{e\} \{e'\}) + \gamma^{-1} [e][e'] = \int_{\Gamma} \partial_t H_{\text{tang}} e' \quad \forall e' \in E^+ \tag{11}$$

pour  $t \geq 0$ , où  $E^+$  est l'espace  $E$  agrandi, défini par

$$E^+ = \{e \in L^2(\Omega) \cdot e|_{\Omega_S} \in H^1(\Omega_S), e|_{\Omega_A} \in H^1(\Omega_A)\}, \tag{12}$$

$\{e\}$  et  $[e]$  désignant maintenant la moyenne et la différence des traces de  $e$  de chaque côté de  $\Sigma$ . Ce sont bien des fonctions continues sur  $E^+$ , donc (11) est bien posé. Le paramètre  $k = \delta/\lambda$  est un choix de modélisation, et on va voir comment  $\delta$  peut être déduit d'observations macroscopiques (courbes  $H-M$ ) sur un échantillon.

La discrétisation se fait en maillant de telle sorte que  $\Sigma$  soit formé d'arêtes du maillage, et en faisant porter à chaque noeud sur  $\Sigma$  deux degrés de liberté, un pour  $e$  du côté  $\Omega_S$ , un pour  $e$  du côté  $\Omega_A$  (Fig. 2d).

Reste à interpréter (11), et à vérifier en particulier que le modèle prédit effectivement un courant surfacique. On voit d'abord que (1) est satisfait séparément dans  $\Omega_S$  et  $\Omega_A$  (où  $j = 0$ ) et que (2) est vérifié. On introduit ensuite les notations  $[\partial_n e]$  pour le saut de la dérivée normale sur  $\Sigma$ , c'est-à-dire la somme des flux sortants de  $\Omega_S$  et  $\Omega_A$ , et  $\{\partial_n e\}$  pour leur demi-différence. On a alors, intégrant par parties dans (11),

$$\int_{\Sigma} (\{\mu_0^{-1} \partial_n e\} [e'] + [\mu_0^{-1} \partial_n e] \{e'\} + (\lambda \mu_0)^{-1} (\gamma \{e\} \{e'\} + \gamma^{-1} [e][e'])) = 0 \tag{13}$$

pour tout  $e' \in E^+$ , d'où les "conditions de transmission"

$$[\mu_0^{-1} \partial_n e] + (\lambda \mu_0)^{-1} \gamma \{e\} = 0, \tag{14}$$

$$\{\mu_0^{-1} \partial_n e\} + (\lambda \mu_0 \gamma)^{-1} [e] = 0. \tag{15}$$

La loi (14) n'est qu'une conséquence de la forme (10) de  $e$ . Dans (14), d'après la loi de Faraday,  $[\mu_0^{-1} \partial_n e]$  est la dérivée temporelle du saut de la partie tangentielle de  $h$  sur  $\Sigma$ , donc du "courant de London" porté par  $\Sigma$ , soit  $J_L$ . Par ailleurs, intégrant (10) de  $-\delta$  à  $\delta$ ,

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e(x) dx = 2\lambda \text{th}(\lambda^{-1} \delta) \{e\} \equiv \lambda \gamma \{e\},$$

ce qui fait que la moyenne  $E_L$  de  $e$  dans la couche de London n'est pas  $\{e\}$ , mais  $\lambda \gamma \{e\}/2\delta$ , et donc  $E_L = \{e\}(\text{th } k)/k$ . Donc (14) signifie simplement  $\mu_0 \lambda^2 \partial_t J_L + 2\delta E_L = 0$ , qui n'est autre que la loi (5) intégrée selon l'épaisseur de la couche.

### 3. Identification du paramètre $\delta$

Il convient maintenant de relier le modèle à l'observation, de manière à décider du choix du paramètre crucial  $\delta$ . Dans ce but, on va étudier l'influence de  $\delta$  sur les "courbes  $H-M$ ", ou courbes d'aimantation, relatives à un échantillon d'un corps régi par ce modèle. Rappelons que dans le cas d'un supraconducteur massif et d'extension spatiale finie, l'aimantation  $\mathbf{M}$  est

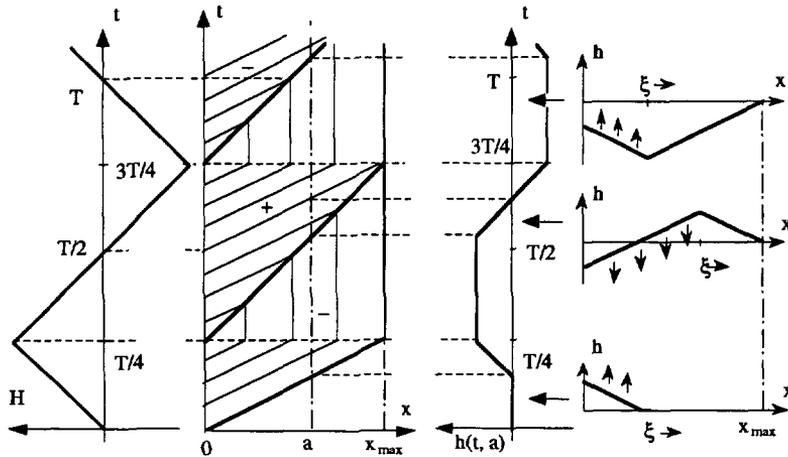


Fig 3. — Pour le champ extérieur appliqué de gauche (périodique, de période  $T$ ), et en l'absence de courants de London, "phases"  $j = 0$  et  $j = \pm j_c$  dans le plan  $x-t$  (avec isovalues de  $h$  dans ce plan), évolution en temps au point de profondeur  $a$ , et quelques profils instantanés de  $h$ . L'abscisse  $x_{\max} = H_{\max}/j_c$  est celle de pénétration maximale.

[For the externally applied field displayed on the left (periodic, period  $T$ ), and without London currents, "phases"  $j = 0$  and  $j = \pm j_c$  in the  $x-t$  plane (with level lines of  $h$  in this plane), temporal evolution at depth  $a$ , and a few instantaneous profiles of  $h$ ]

l'intégrale (prise sur tout l'espace, et à valeur vectorielle)  $\mathbf{M} = \int (\mathbf{h} - \mathbf{H})$ , où  $\mathbf{H}$  est le champ appliqué, et on montre qu'elle est égale au "moment magnétique"  $1/2 \int \mathbf{x} \times \mathbf{j}(x) dx$  <sup>(1)</sup>, l'intégrale étant cette fois limitée au volume du supraconducteur (et prise au sens des distributions, dans le cas où  $\mathbf{j}$  comporte une partie surfacique). La raison d'introduire ce moment est qu'il gouverne le comportement à l'infini du champ magnétique dû à l'échantillon supraconducteur, et qu'il peut donc être mesuré à distance, par divers procédés. La direction de  $\mathbf{H}$  et de  $\mathbf{M}$  étant fixée à l'avance, en règle générale, par les symétries de la situation, et la même pour les deux, on mesure les composantes de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  selon cette direction, d'où des courbes  $H-M$ , dont la comparaison avec les courbes analogues fournies par la simulation permet de remonter, par identification, à des paramètres tels que  $j_c$  et, comme on va le voir, le  $\delta$  ci-dessus.

Pour étudier qualitativement la façon dont  $M$  dépend de  $\delta$ , on va se placer "en dimension 1", en supposant les dimensions de la pièce nettement supérieures à la profondeur de pénétration du champ. Changeant de notation, on désigne par  $x$  la profondeur du point courant sous la surface, par  $h(t, x)$  et  $e(t, x)$  les valeurs des champs en ce point. Ces valeurs s'obtiennent alors "à la main", en résolvant une équation différentielle non-linéaire. Le calcul de  $\int \mathbf{h}$ , et donc de  $\mathbf{M}$ , se réduit à celui de l'intégrale  $\int_0^\infty h(t, x) dx$ , que l'on va noter <sup>(2)</sup>  $M_{1D}(t)$  ci-dessous. On fera cette étude d'abord en l'absence de courants de London, pour référence, puis avec, de manière à voir comment l'évolution de  $M_{1D}$  dépend du paramètre  $\delta$ .

Partant de  $e = 0$  et  $h = 0$  à  $t = 0$ , on suppose un champ extérieur appliqué de la forme indiquée à gauche de la figure 3. De  $t = 0$  à  $T/4$ , le champ magnétique est de la forme

<sup>(1)</sup> On distingue ici le point  $x$  du vecteur  $\mathbf{x}$ , lequel joint l'origine des axes  $O$  au point  $x$ . L'expression du moment est indépendante de l'origine choisie, car  $\int \mathbf{j} = 0$ .

<sup>(2)</sup> Avec quelque abus, car ce n'est pas l'aimantation  $\mathbf{M}$ , qui devient infinie en dimension 1.  $M_{1D}$  est une "aimantation renormalisée", pourrait-on dire.

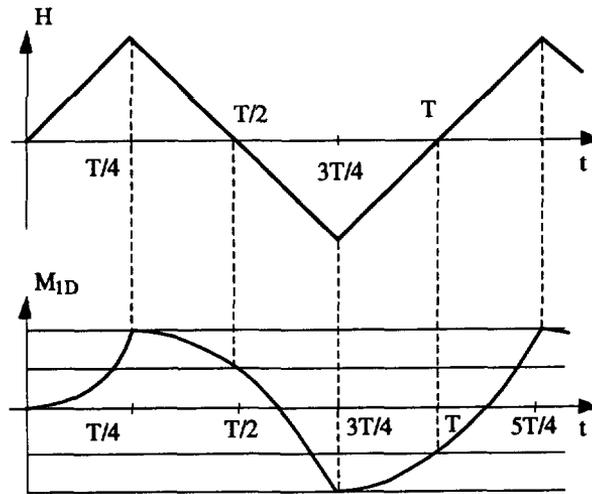


Fig. 4. — Evolution de  $M_{1D}$  pour le champ appliqué de la figure 3.  
 [Evolution of  $M_{1D}$  for the applied field of Figure 3.]

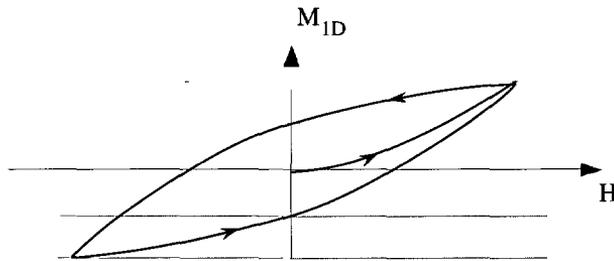


Fig. 5. — Caractéristique  $H-M_{1D}$  correspondante  
 [The corresponding  $H-M_{1D}$  characteristic.]

$h(t, x) = H(t) - j_c x$  pour  $x \leq \xi(t) \equiv H(t)/j_c$ , et  $h(t, x) = 0$  pour  $x > \xi(t)$ . Le front  $\xi(t)$  se déplace vers les  $x > 0$  à la vitesse  $d_t \xi = d_t H/j_c$ . On a donc  $M_{1D} = \int h = H\xi/2 = H^2/2j_c$  dans cette première phase. Ensuite, le champ décroît uniformément à gauche d'un nouveau front (dont la vitesse est deux fois plus faible que celle du premier, dans ce cas de figure), et reste figé à droite de ce front. Notant  $H_{\max}$  le maximum précédent de  $H(t)$ , on a alors  $2\xi j_c = H_{\max} - H$ , et  $\int h = H_{\max}^2/2j_c - \xi(H_{\max} - H)/2$ , donc

$$M_{1D} = (H_{\max}^2 - H^2)/4j_c + H_{\max}H/2j_c,$$

et ainsi de suite. Cela suffit pour dresser le graphe de  $M_{1D}$  en fonction du temps (Fig. 4), dans le cas du  $H(t)$  de la figure 4, et en déduire la caractéristique  $H-M_{1D}$  (Fig. 5).

Avec courants de London, le calcul est nettement plus complexe. On ne le fera que pour les deux premières phases de l'évolution déjà examinée, de 0 à  $T/4$  d'abord, puis de  $T/4$  à  $3T/4$ . On notera  $H^+(t)$  la valeur du champ à droite de  $x = 0$ , c'est-à-dire  $h(t, x + 0)$ . Le courant de

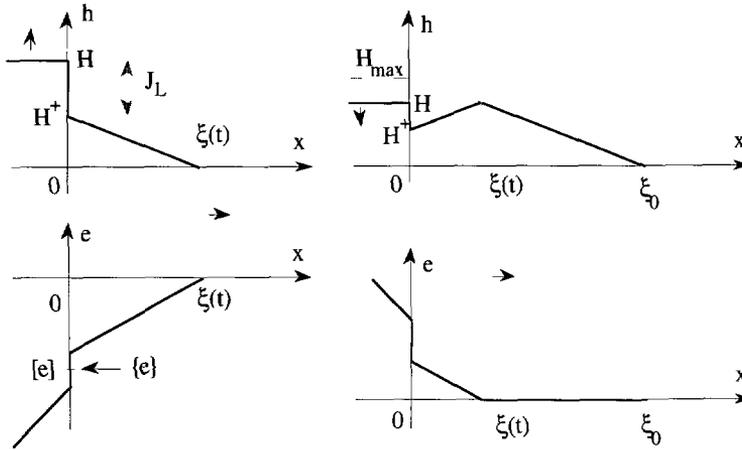


Fig. 6 — Profils de  $h$  et de  $e$  pendant les deux premières phases de l'évolution du champ appliqué (le même que Fig. 4), avec courants de London. À gauche, de 0 à  $T/4$ . À droite, de  $T/4$  à  $3T/4$ . (Attention, ce qui est noté ici  $\xi(t)$  n'a rien à voir avec la "longueur de cohérence"  $\xi$  de la théorie physique )  
 [Profiles of  $h$  and  $e$  during the first two phases of the evolution of the applied field (the same one as in Fig. 4), with London currents. On the left, from 0 to  $T/4$ . On the right, from  $T/4$  to  $3T/4$ . (Beware, what is here denoted  $\xi(t)$  is not related with the so-called "coherence length".)]

London  $J_L$ , qui est le saut <sup>(3)</sup> de  $h(t)$  en  $x = 0$ , est alors égal à  $H^+ - H$ . Il est négatif pendant la phase 1 ( $0 \leq t \leq T/4$ ), tout comme le courant intérieur  $j = \partial_x h$ .

Pendant cette première phase (Fig. 6, g.), il y a un front d'abscisse  $\xi(t)$ , à droite duquel  $h(t, x) = 0$ , et l'on a  $h(t, x) = H^+(t) - j_c x$  pour  $0 \leq x \leq \xi(t)$ . En même temps,

$$e(t, x) = \mu_0 (\xi(t) - x) d_t H^+ \tag{16}$$

pour  $x \leq \xi(t)$  et 0 pour  $x \geq \xi(t)$ . On a  $\{\mu_0^{-1} \partial_n e\} = -d_t(H + H^+)/2$ , d'après la loi de Faraday (cf. Note 3). La discontinuité du champ  $e$  en 0 est donc, d'après (15),

$$[e] = -\lambda \mu_0 \gamma d_t (H^+ + H)/2. \tag{17}$$

Pour la même raison,  $[\mu_0^{-1} \partial_n e] = d_t(H - H^+)$ , donc, d'après (14),

$$\{e\} = \lambda \mu_0 / \gamma d_t (H^+ - H). \tag{18}$$

On a par ailleurs  $H^+ = j_c \xi$ , donc  $e(t, x + 0) = \mu_0 H^+ d_t H^+ / j_c$  d'après (16), donc  $\{e\} = e(t, x + 0) - [e]/2$ , ce qui, d'après (17) et (18), se traduit par

$$\lambda \mu_0 / \gamma d_t (H^+ - H) = 1/2 \mu_0 d_t ((H^+)^2) / j_c + \lambda \mu_0 \gamma d_t (H + H^+) / 4.$$

d'où, compte tenu que  $\gamma/4 \pm \gamma^{-1} = 1/2(\text{th } k \pm \text{coth } k)$ , la relation

$$d_t [(H^+)^2 + H_1 H^+] = H_2 d_t H, \tag{19}$$

<sup>(3)</sup> Prendre garde que le saut est pris du supraconducteur vers l'air, donc  $[h] = h(x + 0) - h(x - 0)$ , et  $[e] = e(x + 0) - e(x - 0)$ . Le sens de la normale est de + vers -, donc le saut de  $\mu_0 \partial_n e$  est  $\mu_0 \partial_x e(x - 0) - \mu_0 \partial_x e(x + 0)$ , et sa moyenne  $\{\mu_0 \partial_n e\} = -\mu_0 \partial_x e(x - 0) - \mu_0 \partial_x e(x + 0)$ .

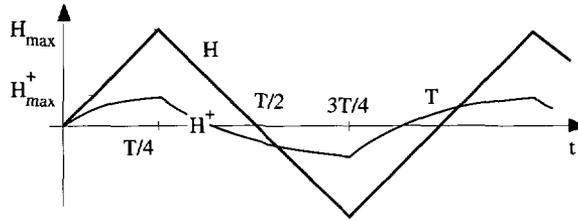


Fig. 7. — Evolution du champ intérieur  $H^+$ , à  $x = 0$ , en parallèle avec celle du champ appliqué  $H$ . Le courant de London est la différence  $H^+ - H$ . Noter que son signe n'est pas tout le temps opposé à celui de  $H$ .

[Evolution of the internal field  $H^+$ , à  $x = 0$ , in front of that of the applied field  $H$ . The London current is the difference  $H^+ - H$ . Note that its sign is not all the time opposed to that of  $H$  ]

où l'on a posé  $H_1 = \lambda_{j_c}(\text{th } k + \text{coth } k)$  et  $H_2 = \lambda_{j_c}(\text{coth } k - \text{th } k)$ , d'où, puisque  $H^+(t) = H(t) = 0$ ,

$$H^+(t) = (-H_1 + [H_1^2 + 4H_2H(t)]^{1/2})/2 \tag{20}$$

pendant cette première phase.

Dans le cas présent,  $H$  est linéaire en  $t$ , et le graphe de  $H^+$  en fonction de  $t$  est donc une parabole d'axe parallèle à  $0t$  (Fig. 7), passant par  $t = 0$  et par le point  $t = T/4$ ,  $H^+ = H_{\max}^+$ , où  $H_{\max}^+ = (-H_1 + [H_1^2 + 4H_2H_{\max}]^{1/2})/2$ . La pente à l'origine est  $H_2/H_1 \, d_t H$ .

Pour la phase suivante, la relation différentielle est analogue à (19) et s'obtient par la même suite de calculs, mais il faut tenir compte du fait que la vitesse du front (Fig. 6, à droite) est deux fois plus faible, et que  $H_{\max} - H^+ = 2j_c \xi$ , d'où, au lieu de (19), et avec les mêmes paramètres  $H_1$  et  $H_2$ ,

$$d_t [(H^+ - H_{\max})^2 - 2H_1H^+ + 2H_2H] = 0, \tag{19'}$$

d'où, au lieu de (20),

$$H_{\max}^+ - H^+(t) = -H_1 + [H_1^2 + 2H_2(H_{\max} - H(t))]^{1/2} \tag{20'}$$

pendant la deuxième phase, et ainsi de suite (Fig. 7). L'arche décrite par (20') est de nouveau une parabole, homothétique à la première dans un rapport 2. Cette remarque permet de tracer aisément la courbe  $H - H^+$  (Fig. 8), d'où on déduit immédiatement la courbe donnant  $J_L$  en fonction de  $H$ .

Ces courbes ne sont pas immédiatement comparables avec celle que l'on peut observer, à savoir la courbe  $H - M_{1D}$ . Mais le calcul de  $M_{1D}$  est simple, une fois connu  $H^+$  : C'est le même que plus haut dans le cas de Bean, mais  $H^+$  remplace  $H$ . On a donc  $M_{1D} = \int h = H^+ \xi / 2 = (H^+)^2 / 2j_c$  dans la première phase, puis  $M_{1D} = ((H_{\max}^+)^2 - (H^+)^2) / 4j_c + H_{\max}^+ H^+ / 2j_c$ , etc.

Toutefois, la courbe  $H - M_{1D}$  qu'on en déduit ressemble beaucoup à celle de la figure 5, de sorte que la comparaison directe de telles courbes n'est pas très révélatrice quant à la valeur de  $k$ . Pour atteindre celle-ci, on peut proposer un indicateur spécifique, qui est la dérivée à l'origine de la courbe  $t \rightarrow [M_{1D}(t)]^{1/2}$  : C'est en effet  $d_t H^+ / (2j_c)^{1/2}$ , proportionnel comme on l'a vu au paramètre  $H_2/H_1$ , c'est-à-dire  $(\text{coth } k - \text{th } k) / (\text{th } k + \text{coth } k)$ , soit  $1/\text{ch}(2k)$ . L'observation de la courbe  $H - M$  donne donc accès au paramètre  $k = \delta/\lambda$ , de façon presque directe : il suffit de représenter la courbe  $H - (M_{1D})^{1/2}$ .

Le modèle qu'on vient de présenter est donc testable. Mais il ne faut pas attendre de lui (pas plus que du modèle de Bean qu'il généralise) la reproduction fidèle de tous les comportements

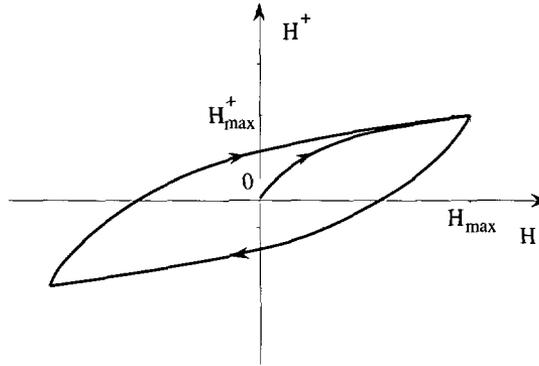


Fig. 8. — Courbe  $H-H^+$ , dans les mêmes conditions  
 [Curve  $H-H^+$ , under the same conditions.]

physiques observés. En particulier, la notion de premier champ critique (celui classiquement noté  $H_{c1}$ ) n'a pas de correspondant dans ce modèle. Il n'est pas exclu qu'une généralisation non-linéaire puisse en rendre compte, mais ceci est un problème ouvert. Noter, à cet égard, qu'il n'y a pas de difficulté à étendre les calculs précédents au cas où  $j_c$  dépendrait de  $b$ . Voir à ce propos [7]. Dans ce dernier article, à la différence de ce qu'on fait ici, le courant de London n'est pas déduit d'un modèle, mais introduit avec une loi de comportement qui lui est propre.)

**4. Extension à la dimension 3**

Il serait sans doute prématuré d'appliquer ce modèle en dimension 3 avant d'avoir exploré ses possibilités et ses relations avec l'observation selon les modalités que l'on vient de suggérer. Mais au cas où ces études y encourageraient, il n'y aurait aucune difficulté à passer à la dimension 3. La formulation sans courants de London est *trouver*  $e \in \mathbb{E}$  tel que  $\mathcal{J}(e) = 0 \quad t = 0$  et

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathcal{J}(e) \cdot e' + \int_{\Omega} \mu_0^{-1} \text{rot } e \cdot \text{rot } e' = \int_{\Gamma} n \times \partial_t H \cdot e' \quad \forall e' \in \mathbb{E}$$

pour  $t \geq 0$ , où  $\mathbb{E}$  est l'espace fonctionnel :

$$\mathbb{E} = \{e \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \text{rot } e \in \mathbb{L}^2(\Omega), \text{div } e = 0 \text{ dans } \Omega_A\}.$$

Ici,  $\Gamma$  est une surface entourant la région d'intérêt, et on suppose le champ magnétique  $H$  donné sur cette surface (sa partie tangentielle suffit).

Pour tenir compte des courants de London, on agrandit  $\mathbb{E}$  en

$$\mathbb{E}^+ = \{e \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \text{rot } e|_{\Omega_S} \in \mathbb{L}^2(\Omega_S), \text{rot } e|_{\Omega_A} \in \mathbb{L}^2(\Omega_A), \text{div } e|_{\Omega_A} = 0\},$$

et on introduit la moyenne  $\{e_{\Sigma}\}$  des traces tangentielles ainsi que leur saut  $[e_{\Sigma}]$ . La formulation avec courants de London est alors *trouver*  $e \in \mathbb{E}^+$  tel que  $\mathcal{J}(e) = 0$  à  $t = 0$  et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \mathcal{J}(e) \cdot e' + \int_{\Omega} \mu_0^{-1} \text{rot } e \cdot \text{rot } e' + \int_{\Sigma} (\lambda \mu_0)^{-1} \gamma \{e_{\Sigma}\} \cdot \{e'_{\Sigma}\} \\ + \int_{\Sigma} (\lambda \mu_0 \gamma)^{-1} [e_{\Sigma}] \cdot [e'_{\Sigma}] = \int_{\Gamma} n \times \partial_t H \cdot e' \quad \forall e' \in \mathbb{E}^+ \end{aligned}$$

pour  $t \geq 0$ , qui implique des conditions de transmission analogues à (14) et (15) à savoir

$$- [\mu_0^{-1} n \times \text{rot } e] + (\lambda\mu_0)^{-1} \gamma \{e_\Sigma\} = 0, \tag{21}$$

$$- \{\mu_0^{-1} n \times \text{rot } e\} + (\lambda\mu_0\gamma)^{-1}[e_\Sigma] = 0, \tag{22}$$

qu'il peut être éclairant de réécrire en termes de  $e$  et  $h$  à la fois :

$$[n \times \partial_t h] + (\lambda\mu_0)^{-1} \gamma \{e_\Sigma\} = 0, \tag{23}$$

$$\{n \times \partial_t h\} + (\lambda\mu_0\gamma)^{-1}[e_\Sigma] = 0. \tag{24}$$

Puisque  $[n \times \partial_t h] = -\partial_t j_\Sigma$ , la relation (23) dit que la dérivée du courant superficiel est proportionnelle au champ électrique tangentiel moyen dans la couche de London, conformément au théorème d'Ampère et à la loi (5), et (24) lie le flux d'induction dans la couche de London au saut de  $e$ , selon la loi de Faraday.

La discrétisation se fait par éléments d'arêtes, avec deux degrés de liberté par arête de  $\Sigma$ .

On s'attend à ce qu'il y ait une formulation duale en champ magnétique. En l'absence de courants de London, ce serait trouver  $h \in \mathbb{H}$  tel que  $h = 0$  à  $t = 0$ ,  $h = H$  sur  $\Gamma$  et

$$\int_\Omega \mu_0 \partial_t h \cdot h' + \int_\Omega \mathcal{E}(\text{rot } h) \cdot \text{rot } h' = 0 \quad \forall h' \in \mathbb{H},$$

où  $\mathcal{E}$  est la réciproque de  $\mathcal{J}$ , avec <sup>(4)</sup>

$$\mathbb{H} = \{h \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \text{rot } h \in \mathbb{L}^2(\Omega), \text{rot } h = 0 \text{ dans } \Omega_A\}.$$

Pour trouver l'extension recherchée, procédons par analogie en réécrivant (23) et (24) comme suit (prendre le produit vectoriel par  $n$ ) :

$$\{n \times e_\Sigma\} - \lambda\mu_0 \gamma^{-1}[\partial_t h] = 0, \tag{25}$$

$$[n \times e_\Sigma] - \lambda\mu_0 \gamma \{\partial_t h\} = 0. \tag{26}$$

Cela suffit pour suggérer la forme correcte de la formulation en  $h$ , trouver  $h \in \mathbb{H}^+$  tel que  $h = 0$  à  $t = 0$ ,  $h = H$  sur  $\Gamma$  et

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mu_0 \partial_t h \cdot h' + \int_\Omega \mathcal{E}(\text{rot } h) \cdot \text{rot } h' + \int_\Sigma \lambda\mu_0 \gamma \{\partial_t h_\Sigma\} \cdot h'_\Sigma \\ + \int_\Sigma \lambda\mu_0 \gamma^{-1}[\partial_t h_\Sigma] \cdot [h'_\Sigma] = 0 \quad \forall h' \in \mathbb{H}^+, \end{aligned}$$

à partir de laquelle les intégrations par parties donnent bien (25) et (26).

### 5. Conclusion

Ni le modèle de London ni celui de Bean ne représentent correctement ce qui se passe à l'échelle des tourbillons d'Abrikosov [1], mais l'un et l'autre sont connus pour donner une prédiction valable des supercourants moyens, dans des circonstances différentes, et au prix d'un bon ajustement des paramètres critiques. Le modèle de Bean rend assez bien compte des supercourants internes, celui de London des courants superficiels. Il serait donc utile dans

---

<sup>(4)</sup> En fait, la condition  $\text{rot } h = 0$  dans  $\Omega_A$  est impliquée par  $\mathcal{E}(\text{rot } h) = 0$ , donc superflue, et il suffirait de se placer dans l'espace  $\mathbb{L}_{\text{rot}}^2(\Omega)$ .

certaines circonstances de pouvoir les superposer, et on vient de présenter un modèle mixte de cette nature. La facilité avec laquelle un tel modèle a pu être construit (sans présumer en rien de son efficacité pratique) témoigne de la puissance des méthodes variationnelles en modélisation.

## Bibliographie

- [1] Abrikosov A.A., On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group, *Soviet Physics JETP* **5** (1957) 1174-1182.
- [2] Bean C.P., Magnetization of Hard Superconductors, *Phys. Rev. Letters* **8** (1962) 250-253.
- [3] Bossavit A., Numerical Modelling of Superconductors in Three Dimensions: A Model and a Finite Element Method, *IEEE Trans., MAG-30* (1994) 3363-3366.
- [4] Bossavit A., "Small parameter" problems in eddy-current theory: a review, and a case-study on how to avoid meshing small airgaps, *IEEE Trans., MAG-32* (1996) 729-732.
- [5] Crank J., The mathematics of diffusion (Clarendon, Oxford, 1956).
- [6] Forkl A. and Kronmüller H., Calculation of the magnetic flux density distribution in type-II superconductors with finite thickness and well-defined geometry, *Phys. Rev. B* **52** (1995) 16130-16139.
- [7] Fournet G. et Mailfert A., Pénétration de l'induction, champ électrique et pertes dans les supraconducteurs de seconde espèce impurs présentant un courant de surface, *J. Phys. France* **31** (1970) 357-367.
- [8] Levillain C., Manuel P. and Thérond P.G., Current, Induction Profiles and Hysteretic Losses in High-Tc Superconducting Tapes, *IEEE Trans., ASC-5* (1995) 705-708.
- [9] London F. and London H., The Electromagnetic Equations of the Supraconductor, *Proc. Roy. Soc. London A* **149** (1935) 71-88.
- [10] Prigozhin L., On the Bean critical-state model in superconductivity, *Eur. J. Appl. Mat.* **7** (1996) 237-248.
- [11] Stefan J., Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung, *Sitz. Akad. Wiss. Wien, Mat.- Nat. Classe* **98** (1889) 473-484.
- [12] Vasiliu F., Bouillault F., Degardin A. and Kreisler A., Modelling of the Electric Characteristic of Type II Superconductors by Means of Ligurian Minimization, *IEEE Trans., MAG-32* (1996) 1144-1147.
- [13] Verdi C., Numerical aspects of parabolic free boundary and hysteresis problems, in Phase Transitions and Hysteresis, A. Visintin, Ed. (Springer-Verlag Berlin, 1994) pp 213-284.
- [14] Yoshida Y., Uesaka M. and Miya K., Magnetic Field and Force Analysis of High Tc Superconductor with Flux Flow and Creep, *IEEE Trans., MAG-30* (1994) 3503-3506.