Sur le groupe d'interpolation

Roland Bacher

Résumé : Nous étudions le groupe d'interpolation dont les éléments sont certaines paires de séries formelles. Ce groupe possède une représentation linéaire fidèle dans les matrices triangulaires inférieures infinies. On peut donc le munir d'une structure de groupe de Lie naturelle. Une fonction reliée à l'exponentielle matricielle entre son algèbre de Lie et sa représentation linéaire étend alors l'exponentielle usuelle à deux arguments (qui sont des série formelles) et cette extension possède des propriétés intéressantes. Nous terminons par une application à la combinatoire énumérative et la description d'une algèbre qui généralise le groupe d'interpolation.

Abstract[1]: We study the interpolation group whose elements are suitable pairs of formal power series. This group has a faithful representation into infinite lower triangular matrices and carries thus a natural structure as a Lie group. The matrix exponential between its Lie algebra and its matrix representation gives rise to a function with interesting properties extending the usual exponential function to two variables (which are formal power series) We finish with an application to enumerative combinatorics and the description of an algebra which generalizes the interpolation group.

1 Introduction

Notons $\mathfrak{m} = x\mathbb{C}[[x]]$ l'idéal maximal des séries formelles sans terme constant et considérons le groupe multiplicatif $\mathcal{U} = \mathbb{C}[[x]] \setminus \mathfrak{m}$ des germes inversibles de fonctions au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$. Introduisons également le groupe non-commutatif $\mathcal{D} = \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ des "difféomorphismes formelles" (avec loi de groupe donnée par la composition des séries). L'action évidente de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{U}$ par "changements de cartes formelles" permet de considérer le produit semi-direct $\mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D}$ qu'on appellera le *groupe d'interpolation*. Notre but est de décrire quelques propriétés de ce groupe. Ce groupe (ou plutôt sa représentation matricielle) a également été introduit sous le nom de "groupe de Riordan" par L. Shapiro dans le but d'interpréter certains triangles de nombres combinatoires, voir par exemple [7].

Le reste de ce papier est organisé comme suit :

[1]Keywords: Lie-group, Lie-algebra, exponential, differential equation. Math. class: 0A15, 22E65, 33B10

Dans le chapitre 2 nous considérons quelques propriétés élémentaires de $\mathcal{I}$.

Le sous-groupe $\mathcal{SI}$ obtenu à partir des sous-groupes $\mathcal{SU} = 1 + \mathfrak{m} \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{SD} = x + \mathfrak{m}^2 \subset \mathcal{D}$ intervient dans le chapitre 3 pour décrire deux déformations "naturelles" (et holomorphes sur les sous-groupes formés de séries holomorphes au voisinage de 0) du groupe abélien $\mathcal{SU}$ vers le groupe non-abélien $\mathcal{SD}$.

Le groupe $\mathcal{I}$ admet une représentation matricielle fidèle ρ dans les matrices triangulaires inférieures infinies. Cette représentation, décrite dans le chapitre 4, permet de considérer $\mathcal{I}$ comme un groupe de Lie de dimension infinie. Le chapitre 5 décrit l'algèbre de Lie $\mathfrak{i}$ de $\rho(\mathcal{I}) \sim \mathcal{I}$.

Le chapitre 6 introduit une fonction $\mathrm{Exp} : \mathbb{C}[[x]] \times \mathbb{C}[[x]] \sim \mathfrak{i} \longrightarrow \mathcal{U}$ obtenue en projettant l'application exponentielle usuelle $\mathfrak{i} \longrightarrow \mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D}$ sur le premier facteur. On peut considérer l'application Exp comme une extension ou une déformation de l'exponentielle usuelle.

Les chapitres 7 et 8 décrivent des équations différentielles et un développement en série pour $\mathrm{Exp}(\alpha; \beta) \in \mathcal{U}$.

Dans le chapitre 9 nous étudions brièvement la fonction réciproque de $\alpha \longmapsto \mathrm{Exp}(\alpha; \beta)$ (pour $\beta \in \mathbb{C}[[x]]$ fixé) et de $\beta \longmapsto \mathrm{Exp}(\beta; \beta)$.

Quelques propriétés analytiques de $\mathrm{Exp}(\alpha; \beta)$ sont étudiées dans le chapitre 10.

Le chapitre 11 donne une interprétation combinatoire pour la série de $\mathrm{Exp}(s(x\beta)', s\beta)$ et utilise les résultats du chapitre 7 pour donner une nouvelle preuve d'un résultat classique de combinatoire énumérative.

Le chapitre 12 est un bref résumé des travaux effectués par différents auteurs autour des "matrices de Riordan" (les éléments de $\rho(\mathcal{I})$).

Finalement, le chapitre 13 décrit une algèbre contenant un groupe matricielle qui généralise le groupe $\rho(\mathcal{SI})$.

Remarque 1.1 *À cause de l'ambiguité de la notation $f(gh)$, nous utiliserons toujours $f \circ (gh)$ pour la composition de fonctions (ici f composé avec le produit de g et de h). Pour cette même raison, nous remplacerons souvent des parenthèses par des accolades. Ainsi $f\{gh + 1\}$ désignera le produit de la fonction f par la fonction obtenue en rajoutant* 1 *au produit de g et h.*

2 Le groupe d'interpolation $\mathcal{I}$

L'anneau commutatif $\mathbb{C}[[x]]$ des séries formelles en x est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m} = x\mathbb{C}[[x]]$ les séries formelles sans terme constant. Désignons par $\mathcal{U} = \mathbb{C}[[x]] \setminus \mathfrak{m} = \mathbb{C}^* + \mathfrak{m}$ le groupe des unités et par $\mathcal{SU} = 1 + \mathfrak{m} \subset \mathcal{U}$ le sous-groupe correspondant aux séries formelles avec coefficient constant 1. Le groupe $\mathcal{SU}$ est également le noyau de l'homomorphisme $A \longmapsto A(0)$ qui associe à une série formelle $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \in \mathcal{U}$ son coefficient constant $A(0) = A_0 \in \mathbb{C}^*$.

Notons de même $\mathcal{D} = \mathbb{C}^* x + \mathfrak{m}^2$ l'ensemble des séries formelles admettant une série réciproque (inverse pour la composition des séries). On peut penser à un élément de $\mathcal{D}$ comme le germe d'un difféomorphisme formel en $0 \in \mathbb{C}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ est muni de la structure de groupe non-commutatif $\alpha\beta = \beta \circ \alpha$ donné par la composition des séries $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$. Nous écrivons $\mathcal{SD} = x + x\mathfrak{m} = x + \mathfrak{m}^2$ pour le sous-groupe des difféomorphismes formels tangents à l'identité. On peut également définir le sous-groupe $\mathcal{SD} \subset \mathcal{D}$ comme le noyau de l'homomorphisme $\alpha \longmapsto \alpha'(0) \in \mathbb{C}$ qui associe à $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n \in \mathcal{D}$ sa dérivée $\alpha_1 = \alpha'(0) \in \mathbb{C}^*$ à l'origine.

Le groupe $\mathcal{D}$ agit par automorphismes sur $\mathcal{U}$ en considérant l'application $A \in \mathcal{U} \longmapsto A \circ \alpha \in \mathcal{U}$. Cette action se restreint en une action de $\mathcal{D}$ (ou de son sous-groupe $\mathcal{SD}$) sur $\mathcal{SU}$.

Définition Le *groupe d'interpolation* $\mathcal{I}$ est le produit semi-direct $\mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D}$ de $\mathcal{U}$ avec $\mathcal{D}$. Le groupe d'interpolation spécial $\mathcal{SI} \subset \mathcal{I}$ est le produit semi-direct $\mathcal{SU} \rtimes \mathcal{SD}$.

Un élément de $\mathcal{I}$ sera noté $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), \ldots$ avec $A, B, C, \ldots \in \mathcal{U}$ et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in \mathcal{D}$. Le produit dans $\mathcal{I}$ est donné par

$$(A, \alpha)(B, \beta) = (A\{B \circ \alpha\}, \beta \circ \alpha)$$

pour $(A, \alpha), (B, \beta) \in I$. L'inverse $(A, \alpha)^{-1}$ d'un élément s'obtient par la formule

$$(A, \alpha)^{-1} = \left(\frac{1}{A \circ \alpha^{\langle -1 \rangle}}, \alpha^{\langle -1 \rangle} \right)$$

où la série réciproque $\alpha^{\langle -1 \rangle}$ de $\alpha \in \mathcal{D}$ est définie par les identités $\alpha \circ \alpha^{\langle -1 \rangle} = \alpha^{\langle -1 \rangle} \circ \alpha = x$. La structure de produit semi-direct sur $\mathcal{I}$ équivaut à l'existence d'une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 1 \ .$$

Pour l'injection $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{I}$ nous choisirons dorénavant toujours $A \in \mathcal{U} \longmapsto (A, x) \in \mathcal{I}$ ce qui nous permettra d'identifier $\mathcal{U}$ avec le sous-groupe $(\mathcal{U}, x) \subset \mathcal{I}$. La surjection $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{D}$ possède (par exemple) la section $\alpha \in \mathcal{D} \longmapsto (1, \alpha) \in \mathcal{I}$. Nous noterons $(1, \mathcal{D}) \subset \mathcal{I}$ le sous-groupe image de cette section.

Le groupe d'interpolation spécial $\mathcal{SI} = \mathcal{SU} \rtimes \mathcal{SD}$ s'obtient comme le noyau de l'homomorphisme $\mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ défini par l'évaluation $(A, \alpha) \longmapsto (A(0), \alpha'(0))$. La suite exacte pour $\mathcal{I}$ donne par restriction une suite exacte pour $\mathcal{SI}$.

Proposition 2.1 *Pour $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ trois nombres complexes, l'application $\varphi_{\kappa,\lambda,\mu} : \mathcal{SI} \longrightarrow \mathcal{SI}$ définie par*

$$\varphi_{\kappa,\lambda,\mu}(A, \alpha) = \left(A^{\kappa} \left\{ \frac{\alpha}{x} \right\}^{\lambda} \{\alpha'\}^{\mu}, \alpha \right)$$

est un endomorphisme de groupes. Pour $\kappa \in \mathbb{C}^*$, c'est un isomorphisme d'inverse $\varphi_{1/\kappa,-\lambda,-\mu}$.

Remarque 2.2 *L'homomorphisme $\varphi_{\kappa,\lambda,\mu}$ est défini en utilisant la détermination principale $log \circ A, log \circ \left(\frac{\alpha}{x}\right), log \circ \alpha' \subset \mathfrak{m}$ dans le calcul des puissances de $A, \left(\frac{\alpha}{x}\right), \alpha' \in 1 + \mathfrak{m}$.*

À cause de la monodromie du logarithme complexe, l'homomorphisme $\varphi_{\kappa,\lambda,\mu}$ de la proposition 2.1 ne provient pas d'un homomorphisme de $\mathcal{I}$, sauf si $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$. On peut cependant l'étendre au produit semi-direct $\mathcal{U}_{>0} \rtimes \mathcal{D}_{>0}$ où $\mathcal{U}_{>0} = \mathbb{R}_{>0} + \mathfrak{m} \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{D}_{>0} = x(\mathbb{R}_{>0} + \mathfrak{m}) \subset \mathcal{D}$ ou encore relever $\varphi_{\kappa,\lambda,\mu}$ sur le "revêtement universel" $\tilde{\mathcal{I}}$ de $\mathcal{I}$ obtenu par un relèvement dans $\mathbb{R}$ des arguments $arg(A(0)), arg(\alpha'(0)) \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$.

Indiquons aussi l'existence des isomorphismes

$$(A, \alpha) \longmapsto (A\{A(0)\}^a\{\alpha'(0)\}^b, \alpha)$$

pour $a, b, \in \mathbb{Z}$ de $\mathcal{I}$ (sur le groupe $\tilde{\mathcal{I}}$, ces homomorphismes sont définis pour tout $a, b \in \mathbb{C}$). Leur nature est assez trivial car le sous-groupe $(\mathbb{C}^*, x) \subset \mathcal{I}$ est le centre de $\mathcal{I}$.

Remarque 2.3 *L'automorphisme intérieur*

$$(A, \alpha) \longmapsto (1, Kx)(A, \alpha)\left(1, \frac{x}{K}\right) = \left(A \circ (Kx), \frac{\alpha \circ (Kx)}{K}\right)$$

défini pour tout $K \in \mathbb{C}^*$ correspond essentiellement à un changement de variable linéaire de $\mathbb{C}$.

Preuve de la proposition 2.1 On a $\varphi_{\kappa,\lambda,\mu}(1, x) = (1, x)$. Le calcul

$$\begin{aligned}
\varphi_{\kappa,\lambda,\mu}(A, \alpha)\varphi_{\kappa,\lambda,\mu}(B, \beta) &= \left(A^\kappa \left\{\tfrac{\alpha}{x}\right\}^\lambda \{\alpha'\}^\mu, \alpha\right)\left(B^\kappa \left\{\tfrac{\beta}{x}\right\}^\lambda \{\beta'\}^\mu, \beta\right) \\
&= \left(A^\kappa \left\{\tfrac{\alpha}{x}\right\}^\lambda \{\alpha'\}^\mu \left(B^\kappa \left\{\tfrac{\beta}{x}\right\}^\lambda \{\beta'\}^\mu\right) \circ \alpha, \beta \circ \alpha\right) \\
&= \left(A^\kappa \{B \circ \alpha\}^\kappa \left\{\tfrac{\beta \circ \alpha}{x}\right\}^\lambda \{(\beta \circ \alpha)'\}^\mu, \beta \circ \alpha\right) \\
&= \varphi_{\kappa,\lambda,\mu}(A\{B \circ \alpha\}, \beta \circ \alpha)
\end{aligned}$$

termine la preuve. □

Remarque 2.4 *On peut généraliser le groupe $\mathcal{I}$ (et son sous-groupe $\mathcal{SI}$) en remplaçant le groupe des unités $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}[[x]]$ par le groupe des unités dans les germes de fonctions au voisinage d'un point $P \in X$ où X est un espace topologique et en considérant à la place de $\mathcal{D}$ un groupe formé de germes d'homéomorphismes fixant P.*

Une autre généralisation de $\mathcal{I}$ consiste à remplacer le corps $\mathbb{C}$ par un autre corps de base. Une grande partie de notre papier s'adapte facilement au cas d'un corps commutatif quelconque.

Le groupe $\mathcal{I}$ possède des sous-groupes intéressants : On peut par exemple se restreindre aux séries ayant un rayon de convergence > 0 et travailler

uniquement avec des fonctions $A \in \mathcal{U}, \alpha \in \mathcal{D}$ holomorphes au voisinage de 0. On peut également se restreindre aux fonctions $A \in \mathcal{U}, \alpha \in \mathcal{D}$ qui sont algébriques. (Pour cela, il faut montrer l'algébricité de la composition de deux fonctions algébriques et de la réciproque d'une fonction algébrique : Pour α, β algébriques dans des ouverts convenables de $\mathbb{C}$, la composition $\gamma = \beta \circ \alpha$ vérifie l'équation $P(\alpha(x), \gamma(x))$ pour $P(x, \beta(x)) = 0$ une équation polynomiale définissant β. Le corps de fonctions engendré par x et γ est donc bien une extension finie du corps des fonctions rationelles $\mathbb{C}(x)$ sur $\mathbb{C}$ sur la sphère de Riemann. Similairement, on a $P(\alpha^{\langle -1 \rangle}(y), y) = 0$ pour $P(x, \alpha(x))$ une équation polynomiale définissant la fonction algébrique $\alpha \in \mathcal{D}$.)

Remarque 2.5 *La notation $\mathcal{U}$ choisie pour le groupe des unités dans $\mathbb{C}[[x]]$ ne doit pas être confondue avec la notation $\mathbf{U}(\mathcal{H})$ utilisée habituellement pour le groupe unitaire d'un espace de Hilbert.*

3 Interpolations continues entre inversion et réversion

Pour $\tau \in \mathbb{C}$, considérons les sous-ensembles

$$\mathcal{SG}(\tau) = \{(A, xA^\tau) | A \in \mathcal{SU}\} \subset \mathcal{SI}$$

et

$$\mathcal{SG}'(\tau) = \{(A, \int_0 A^\tau) | A \in \mathcal{SU}\} \subset \mathcal{SI}$$

où l'on utilise la détermination principale $\log(1+\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ du logarithme pour le calcul de $A^\tau = e^{\tau \log(A)}$ et où $\int_0 A^\tau = x + \sum_{n=1}^\infty A_{n,\tau} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la primitive dans l'idéal maximal $\mathfrak{m} = x\mathbb{C}[[x]]$ de la série $A^\tau = 1 + \sum_{n=1}^\infty A_{n,\tau} x^n \in \mathcal{SU}$.

Proposition 3.1 *$\mathcal{SG}(\tau)$ et $\mathcal{SG}'(\tau)$ sont des sous-groupes de $\mathcal{SI}$, isomorphes à $\mathcal{SU}$ pour $\tau = 0$ et isomorphes à $\mathcal{SD}$ sinon.*

Preuve La preuve est évidente pour $\tau = 0$. Pour $\tau \neq 0$, elle résulte des identités

$$\mathcal{SG}(\tau) = \varphi_{0,\frac{1}{\tau},0}(1, \mathcal{SD}) = \{(\left\{\frac{\alpha}{x}\right\}^{1/\tau}, \alpha), \alpha \in \mathcal{SD}\} \subset \mathcal{SI}$$

et

$$\mathcal{SG}'(\tau) = \varphi_{0,0,\frac{1}{\tau}}(1, \mathcal{SD}) = \{(\left\{\alpha'\right\}^{1/\tau}, \alpha), \alpha \in \mathcal{SD}\} \subset \mathcal{SI}$$

et de l'observation que $\varphi_{0,\lambda,\mu}(1, \mathcal{SD})$ est isomorphe à $\mathcal{SD}$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. □

Corollaire 3.2 *(i) L'application*

$$\tau \longmapsto \frac{1}{A \circ (xA^\tau)^{\langle -1\rangle}}$$

permet d'interpoler entre la série inverse $\frac{1}{A}$ *(correspondante à* $\tau = 0$*) de* $A \in \mathcal{SU}$ *et la série réciproque*

$$(xA)^{\langle -1\rangle} = \frac{x}{A \circ (xA)^{\langle -1\rangle}}$$

(correspondante à $\tau = 1$*) de* $xA \in \mathcal{SD}$*.*

(ii) L'application

$$\tau \longmapsto \frac{1}{A \circ \left(\int_0 A^\tau\right)^{\langle -1\rangle}} \ ,$$

permet d'interpoler entre la série inverse $\frac{1}{A}$ *(correspondante à* $\tau = 0$*) de* $A \in \mathcal{SU}$ *et la série réciproque*

$$(\int_0 A)^{\langle -1\rangle} = \int_0 \frac{1}{A \circ \left(\int_0 A\right)^{\langle -1\rangle}}$$

(correspondante à $\tau = 1$*) de* $\int_0 A \in \mathcal{SD}$*.*

Ce corollaire est à l'origine de la terminologie "groupe d'interpolation" pour $\mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D}$.

Remarque 3.3 *Les deux interpolations du corollaire 3.2 se font de façon holomorphe (par rapport à* τ *et* x*) si* $A \in \mathcal{SU}$ *est holomorphe au voisinage de* 0*.*

Preuve du corollaire 3.2 Cela résulte des formules

$$(A, xA^\tau)^{-1} = \left(\frac{1}{A \circ (xA^\tau)^{\langle -1\rangle}}, (xA^\tau)^{\langle -1\rangle}\right) \in \mathcal{SG}(\tau) \ ,$$

$$\left(A, \int_0 A^\tau\right)^{-1} = \left(\frac{1}{A \circ \left(\int_0 A^\tau\right)^{\langle -1\rangle}}, \left(\int_0 A^\tau\right)^{\langle -1\rangle}\right) \in \mathcal{SG}'(\tau)$$

pour les éléments inverses de $(A, xA^\tau) \in \mathcal{SG}(\tau)$ et de $(A, \int_0 A^\tau) \in \mathcal{SG}'(\tau)$. □

Remarque 3.4 *Le calcul de* $(C_\tau(s), \gamma_\tau(s)) = (A, xA^\tau)^s \in \mathcal{SG}(\tau) \subset \mathcal{SI}$ *(respectivement de* $(\tilde{C}_\tau(s), \tilde{\gamma}_\tau(s)) = (A, \int_0 A^\tau)^s \in \mathcal{SG}'(\tau) \subset \mathcal{SI}$*) permet d'interpoler entre* $A^s = C_0(s) \in \mathcal{SU}$ *et* $(xA)^{\langle s\rangle} = xC_1(s) = \gamma_1(s) \in \mathcal{SD}$ *(respectivement* $(\int_0 A)^{\langle s\rangle} = \int_0 C_1(s) = \tilde{\gamma}_1(s) \in \mathcal{SD}$ *(où* $\alpha^{\langle s\rangle} = \alpha \circ \alpha \circ \cdots \circ \alpha$ *si* $s \in \mathbb{N}$ *et où* $\alpha^{\langle s\rangle} = \alpha^{\langle -1\rangle} \circ \alpha^{\langle -1\rangle} \circ \cdots \circ \alpha^{\langle -1\rangle}$ *si* $s \in -\mathbb{N}$*) pour tout* $s \in \mathbb{Z}$*. En utilisant la structure de groupe de Lie sur* $\mathcal{SI}$ *(voir les chapitres suivants), on peut même considérer* s *à valeurs dans* $\mathbb{C}$*.*

Remarque 3.5 *L'interpolation du corollaire 3.2 et la remarque précedente s'étendent sans difficulté aux groupes* $\mathcal{U}_{>0} = \mathbb{R}_{>0} + \mathfrak{m} \subset \mathcal{U}$ *et* $\mathcal{D}_{>0} = x(\mathbb{R}_{>0} + \mathfrak{m}) \subset \mathcal{D}$. *En travaillant dans le revêtement universel* $\tilde{\mathcal{I}}$ *décrit dans la remarque 2.2, on peut interpoler entre les groupes* $\tilde{\mathcal{U}}$ *et* $\tilde{\mathcal{D}}$ *obtenus à partir de* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{D}$ *en considérant des relèvements réels des argument de* $A(0)$ *et* $\alpha'(0)$ *pour* $A \in \mathcal{U}, \alpha \in \mathcal{D}$.

Remarque 3.6 *Les bijections* $(A, xA^{\tau_1}) \longmapsto (A, xA^{\tau_2})$ *et* $(A, \int_0 A^{\tau_1}) \longmapsto (A, \int_0 A^{\tau_2})$ *sous-jacentes à l'interpolation ne sont pas des homomorphismes de groupes pour* $\tau_1 \neq \tau_2$.

Remarque 3.7 *Les deux façons d'interpoler entre le groupe commutatif* $\mathcal{SU} = 1 + x\mathbb{C}[[x]]$ *et le groupe non-commutatif* $\mathcal{SD} = x + x^2\mathbb{C}[[x]]$ *utilisent les deux bijections ensemblistes naturelles* $A \longmapsto xA$ *et* $A \longmapsto \int_0 A$ *entre* $\mathcal{SU}$ *et* $\mathcal{SD}$. *On peut évidemment les combiner avec des déformations* $\tau \longmapsto A_\tau$ *de* A *pour obtenir d'autres formules, par exemple pour d'autres bijections entre* $\mathcal{SU}$ *et* $\mathcal{SD}$. *Pour l'interpolation entre* $\frac{1}{A}$ *et* $\frac{(\int_0 A)^{\langle -1\rangle}}{x}$, *on peut ainsi par exemple également prendre*

$$\tau \longmapsto \frac{1}{A_\tau \circ (xA_\tau^\tau)^{\langle -1\rangle}}$$

avec $A_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{(n+1)^\tau}$.

De la même manière, la fonction

$$\tau \longmapsto \frac{1}{\tilde{A}_\tau \circ (\int_0 \tilde{A}_\tau^\tau)^{\langle -1\rangle}}$$

avec $\tilde{A}_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^\tau A_n x^n$, *interpole entre* $\frac{1}{A}$ *et* $\frac{(xA)^{\langle -1\rangle}}{x}$.

Remarque 3.8 *Mentionnons qu'il existe beaucoup d'autres formules d'interpolation qui sont cependant moins naturelles car non reliées à la structure de groupe de* $\mathcal{SI}$. *Un exemple est donné par la formule*

$$\tau \longmapsto \frac{1}{A \circ \left(x \left(\frac{1}{x}\int_0 A\right)^\tau\right)}$$

qui interpole entre $\frac{1}{A} \in \mathcal{SU}$ *et* $\frac{1}{x}\left(\int_0 A\right)^{\langle -1\rangle}$.

4 La représentation matricielle de $\mathcal{I}$

Pour $(A, \alpha) \in \mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D}$, notons $\rho(A, \alpha)$ la matrice infinie de coefficients

$$(\rho(A,\alpha))_{i,j} = [x^i]\left(A\alpha^j\right),\ 0 \leq i, j \in \mathbb{N}$$

où $[x^i]\left(A\alpha^j\right)$ désigne le coefficient γ_i de la série formelle $A\alpha^j = \sum_{n=j}^{\infty} \gamma_n x^n$. Notons $\rho(\mathcal{I}) = \{\rho(A,\alpha) \mid (A,\alpha) \in \mathcal{I}\}$ l'ensemble de ces matrices. L'application $(A,\alpha) \longmapsto \rho(A,\alpha)$ entre $\mathcal{I}$ et $\rho(\mathcal{I})$ est bijective car $A = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\rho(A,\alpha)\right)_{n,0} x^n \in \mathcal{U}$ est la série génératrice de la colonne d'indice 0 dans $\rho(A,\alpha)$ et $A\alpha = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho(A,\alpha)\right)_{n,1} x^n\right)$ est la série génératrice de la colonne d'indice 1 dans $\rho(A,\alpha)$. Remarquons aussi que $\rho(\mathcal{I})$ est formé de matrices qui sont triangulaires inférieures et infinies. Le sous-ensemble $\rho(\mathcal{SI})$ associé au sous-groupe $\mathcal{SI} \subset \mathcal{I}$ consiste en les matrices unipotentes de $\rho(\mathcal{I})$.

Théorème 4.1 *L'ensemble $\rho(\mathcal{I})$ est un groupe de matrices et l'application $(A,\alpha) \longmapsto \rho(A,\alpha)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D}$ et $\rho(\mathcal{I})$.*

Remarque 4.2 *On pourrait également considérer le produit semi-direct*

$$\mathbb{C}[[x]][x^{-1}]^* \rtimes \mathcal{D}$$

obtenu en remplaçant le groupe $\mathcal{U}$ par le groupe des éléments non-nuls $\mathbb{C}[[x]][x^{-1}]^*$ du corps des séries de Laurent. Ce groupe admet une représentation matricielles dans les matrices biinfinies en associant à $(A,\alpha) \in \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]^* \rtimes \mathcal{D}$ la matrice $\rho(A,\alpha)$ avec coefficients $(\rho(A,\alpha))_{i,j} = [x^i](A\alpha^j)$ pour $i,j \in \mathbb{Z}$.

Remarque 4.3 *L'homomorphisme $\varphi_{0,\lambda,0} : (A,\alpha) \longmapsto \left(A\left\{\frac{\alpha}{x}\right\}^{\lambda}, \alpha\right)$ considéré dans la proposition 2.1 provient de la représentation linéaire ρ : En effet, pour $\lambda \in \mathbb{N}$ un entier naturel, la matrice $\rho(\varphi_{0,\lambda,0}(A,\alpha))$ s'obtient en effaçant les λ premières lignes et colonnes de la matrice triangulaire inférieure $\rho(A,\alpha)$.*

Preuve du théorème 4.1 Le résultat découle du calcul

$$\begin{aligned}(\rho(A,\alpha)\rho(B,\beta))_{i,j} &= \textstyle\sum_k [x^i](A\alpha^k)[x^k](B\beta^j) \\ &= [x^i] \textstyle\sum_k A(B\circ\alpha)(\beta\circ\alpha)^j \\ &= (\rho((A,\alpha)(B,\beta)))_{i,j}\end{aligned}$$

et du fait que $\rho(1,x)$ est la matrice identité. □

Dorénavant nous allons parfois utiliser la représentation fidèle $(A,\alpha) \longmapsto \rho(A,\alpha)$ pour identifier le groupe abstrait $\mathcal{I}$ avec sa représentation matricielle $\rho(\mathcal{I})$.

5 L'algèbre de Lie de $\rho(\mathcal{I})$

Associons à une série formelle $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ les deux matrices triangulaires inférieures infinies

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_0 & & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & & \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad d_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & \alpha_0 & & & & \\ 0 & \alpha_1 & 2\alpha_0 & & & \\ 0 & \alpha_2 & 2\alpha_1 & 3\alpha_0 & & \\ 0 & \alpha_3 & 2\alpha_2 & 3\alpha_1 & 4\alpha_0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont donnés par $(u_\alpha)_{i,j} = \alpha_{i-j}$ et $(d_\alpha)_{i,j} = j\alpha_{i-j}$ pour $i, j \geq 0$. Remarquons qu'on a $d_\alpha = u_\alpha d_1$ où la matrice d_1 associée à la série constante 1 est la matrice diagonale infinie de coefficients diagonaux $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ les entiers naturels. Notons

$$\mathfrak{i} = \{u_\alpha + d_\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}[[x]]\}$$

l'espace vectoriel engendré par les matrices de la forme u_α, d_α. Notons encore

$$\mathfrak{si} \subset= \{u_\alpha + d_\beta \mid \alpha, \beta \in \mathfrak{m}\} \subset \mathfrak{i}$$

le sous-espace de codimension 2 des matrices triangulaire inférieures strictes dans $\mathfrak{i}$.

Théorème 5.1 *L'espace vectoriel* $\mathfrak{i}$ *est l'algèbre de Lie de* $\rho(\mathcal{I})$*. Le sous-espace* $\mathfrak{si} \subset \mathfrak{i}$ *correspond au sous-groupe* $\rho(\mathcal{SI})$*. Le crochet de Lie sur* $\mathfrak{i}$ *est donné par les formules*

$$\begin{aligned} [u_\alpha, u_\beta] &= 0 \\ [d_\alpha, u_\beta] &= u_{(x\alpha\beta')} \\ [d_\alpha, d_\beta] &= d_{(x(\alpha\beta' - \alpha'\beta))} \ . \end{aligned}$$

et on a en particulier $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = \mathfrak{si}$.

Preuve Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[x]]$ et h une variable formelle considérons l'élément de l'espace tangent $T_{(1,x)}(\mathcal{I})$ en $\rho(1, x) \in \rho(\mathcal{I})$ défini par l'application $h \longmapsto (1 + h\alpha, x(1 + h\beta))$. Un calcul élémentaire montre qu'on a

$$\rho(1 + h\alpha, x(1 + h\beta)) = \mathrm{Id} + h(u_\alpha + d_\beta) + O(h^2) \ .$$

L'espace tangent en $\rho(1, x) \in \rho(\mathcal{I})$ est donc donné par l'espace vectoriel $\mathfrak{i}$ qui s'identifie alors à l'algèbre de Lie de $\rho(\mathcal{I})$. Comme le sous-groupe $\rho(\mathcal{SI}) \subset \rho(\mathcal{I})$ est formé de matrices triangulaires inférieures unipotentes, son algèbre de Lie $\mathfrak{si}$ correspond aux éléments triangulaires inférieures strictes de $\mathfrak{i}$.

Le calcul du crochet de Lie résulte des identités suivantes (qui ne font intervenir que des sommes finies):

$$[u_\alpha, u_\beta]_{i,j} = \sum_k \alpha_{i-k}\beta_{k-j} - \beta_{i-k}\alpha_{k-j} = 0 \ ,$$

$$\begin{aligned}
[d_\alpha, u_\beta]_{i,j} &= \textstyle\sum_k k\alpha_{i-k}\beta_{k-j} - j\sum_k \beta_{i-k}\alpha_{k-j} \\
&= \textstyle\sum_k k\alpha_{i-k}\beta_{k-j} - j\sum_k \alpha_{i-k}\beta_{k-j} \\
&= \textstyle\sum_k (k-j)\alpha_{i-k}\beta_{k-j} \\
&= \left(u_{(x\alpha\beta')}\right)_{i,j}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[d_\alpha, d_\beta]_{i,j} &= \textstyle\sum_k kj\,(\alpha_{i-k}\beta_{k-j} - \beta_{i-k}\alpha_{k-j}) \\
&= \textstyle j\sum_k (k-j)\,(\alpha_{i-k}\beta_{k-j} - \beta_{i-k}\alpha_{k-j}) \\
&= \left(d_{(x(\alpha\beta'-\alpha'\beta))}\right)_{i,j} \ .
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Pour terminer ce chapitre, mentionnons sans donner les preuves faciles les faits suivants :

Proposition 5.2 *(i) Le sous-espace vectoriel* $\mathfrak{u} = \{u_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}[[x]]\} \subset \mathfrak{i}$ *est l'algèbre de Lie (avec crochet nul) du sous-groupe commutatif* $\rho(\mathcal{U}, x) \sim \mathcal{U}$ *de* $\rho(\mathcal{I})$.

(ii) L'endomorphisme de groupe $\varphi_{\kappa,\lambda,\mu}(C,\gamma) = \left(C^\kappa \left\{\frac{\gamma}{x}\right\}^\lambda \{\gamma'\}^\mu, \gamma\right)$ *de* $\mathcal{SI}$ *(voir proposition 2.1) correspond à (la restriction au sous-espace* $\mathfrak{si}$ *de) l'endomorphisme d'algèbre de Lie (aussi noté)* $\varphi_{\kappa,\lambda,\mu}(u_\alpha + d_\beta) = u_{(\kappa\alpha+\lambda\beta+\mu(\beta+x\beta'))} + d_\beta$ *de* $\mathfrak{i}$ *et provient d'un endomorphisme de groupe* $\tilde{\varphi}_{\kappa,\lambda,\mu}$ *du "revêtement universel"* $\tilde{\mathcal{I}}$ *de* $\mathcal{I}$*, obtenu en relevant les arguments* $arg(C(0)), arg(\gamma'(0)) \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ *dans* $\mathbb{R}$.

(iii) Le sous-espace vectoriel $\mathfrak{d} = \{d_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}[[x]]\} \subset \mathfrak{i}$ *est l'algèbre de Lie du sous-groupe* $(1, \mathcal{D}) \sim \mathcal{D}$ *de* $\mathcal{I}$*. Plus généralement, les sous-espaces* $\varphi_{0,\lambda,\mu}(\mathfrak{d}) = \{u_{(\lambda+\mu)\alpha+\mu x\alpha'} + d_\alpha | \alpha \in \mathbb{C}[[x]]\}$ *sont des sous-algèbres de Lie et les algèbres de Lie* $\varphi_{0,\lambda,\mu}(\mathfrak{d}) \cap \mathfrak{si}$ *correspondent aux sous-groupes de Lie* $\varphi_{0,\lambda,\mu}(1, \mathcal{SD}) = \{\left(\left\{\frac{\alpha}{x}\right\}^\lambda \{\alpha'\}^\mu, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathcal{SD}\} \subset \mathcal{SI}$ *qui sont tous isomorphes à* $\mathcal{SD}$.

(iv) Les sous-groupes $\mathcal{SG}(\tau) = \{(A, xA^\tau) | A \in \mathcal{SU}\}$ *et* $\mathcal{SG}'(\tau) = \{(A, \int_0 A^t a u) | A \in \mathcal{SU}\}$ *de* $\mathcal{SI}$ *utilisés dans le chapitre 3 pour interpoler entre* $\mathcal{SU}$ *et* $\mathcal{SD}$ *correspondent aux sous-algèbres de Lie* $\mathfrak{sg}(\tau) = \mathfrak{g}(\tau) \cap \mathfrak{si}$ *et* $\mathfrak{sg}'(\tau) = \mathfrak{g}(\tau) \cap \mathfrak{si}$ *de* $\mathfrak{si}$ *où* $\mathfrak{g}(\tau) = \{u_\alpha + \tau d_\alpha | \alpha \in \mathbb{C}[[x]]\}$ *et* $\mathfrak{g}'(\tau) = \{u_{(x\alpha)'} + \tau d_\alpha | \alpha \in \mathbb{C}[[x]]\}$.

6 L'application exponentielle exp : $\mathfrak{i} \longrightarrow \rho(\mathcal{I})$

Comme $M = u_\alpha + d_\beta \in \mathfrak{i}$ est une matrice triangulaire inférieure, l'exponentielle matricielle

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

converge vers une matrice triangulaire inférieure inversible. (Pour une matrice triangulaire inférieure stricte $M = u_\alpha + d_\beta \in \mathfrak{si}$, la situation est encore meilleure car le coefficient $(M^n)_{i,j}$ est nul pour $n > i-j$ et il n'y a plus besoin d'analyse.) Il résulte de résultats classiques que l'ensemble $\{\exp(M) \mid M \in \mathfrak{i}\}$ s'identifie au groupe de Lie $\rho(\mathcal{I})$ considéré précédemment.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[x]]$, notons $\mathrm{Exp}(\alpha;\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{n,0} x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ la série génératrice de la colonne d'indice 0 dans la matrice $M = \exp(u_\alpha + d_\beta) \in \rho(\mathcal{I})$.

Proposition 6.1 *Le coefficient $M_{i,j}$ (pour $0 \leq i, j$) de la matrice $M = exp(u_\alpha + d_\beta) \in \rho(\mathcal{I})$ est donné par la formule*

$$M_{i,j} = [x^{i-j}] Exp(\alpha + j\beta; \beta) \ .$$

La série formelle $x^j Exp(\alpha + j\beta; \beta) = \sum_{i=0}^{\infty} M_{i,j} x^i$ est donc la série génératrice de la colonne d'indice j de M.

Corollaire 6.2 *Si $exp(u_\alpha + d_\beta) = \rho(C, \gamma) \in \rho(\mathcal{I})$ (pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[x]], C \in \mathcal{U}, \gamma \in \mathcal{D}$) alors*

$$C = Exp(\alpha; \beta)$$

et

$$C\gamma = x \ Exp(\alpha + \beta; \beta) \ .$$

Remarque 6.3 *On verra (voir l'assertion (iii) de la proposition 6.5) qu'on a également $\gamma = x \ Exp(\beta; \beta)$ si $exp(u_\alpha + d_\beta) = \rho(C, \gamma)$.*

Remarque 6.4 *Comme $exp(u_\alpha) = \rho(e^\alpha, x)$, la fonction $\alpha \longmapsto Exp(\alpha; 0) = e^\alpha$ est l'exponentielle usuelle d'une série formelle $\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$.*

De manière similaire, si α et β sont tous les deux des fonctions constantes, la matrice $u_\alpha + d_\beta$ est diagonale et on a donc $Exp(\alpha; \beta) = e^\alpha$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Preuve de la proposition 6.1 La formule est vraie pour $j = 0$ par définition de la série formelle $\mathrm{Exp}(\alpha; \beta)$.

Pour $j > 0$, on utilise les identités

$$\begin{aligned} \left(\exp(u_\alpha + d_\beta)\right)_{i,j} &= \left(\varphi_{0,j,0}(\exp(u_\alpha + d_\beta))\right)_{i-j,0} \\ &= \left(\exp(\varphi_{0,j,0}(u_\alpha + d_\beta))\right)_{i-j,0} \\ &= \left(\exp(u_{(\alpha+j\beta)} + d_\beta)\right)_{i-j,0} \end{aligned}$$

où $\varphi_{0,j,0}$ est l'homomorphisme de groupe (ou d'algèbre) de la proposition 2.1 qui consiste à effacer les j premières lignes et colonnes de la matrice triangulaire infinie $\exp(u_\alpha + d_\beta) \in \rho(\mathcal{I})$. □

La preuve du corollaire 6.2 est évidente.

Proposition 6.5 *(i) On a pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[x]]$ l'égalité*

$$exp(u_\alpha + d_\beta) = \rho(Exp(\alpha;\beta), x\ Exp(\beta;\beta)) \in \rho(\mathcal{I})\ .$$

(ii) On a

$$\alpha \longmapsto Exp(\alpha;0) = e^\alpha\ .$$

(iii) On a

$$\begin{aligned} &Exp(\kappa\alpha + \lambda\beta + \mu(x\beta)';\beta) \\ &\quad = Exp(\alpha;\beta)^\kappa Exp(\beta;\beta)^\lambda \left(\frac{d}{dx}(x\ Exp(\beta;\beta))\right)^\mu\ . \end{aligned}$$

(iv) On a

$$Exp((s+t)\alpha;(s+t)\beta) = Exp(s\alpha;s\beta)\,(Exp(t\alpha;t\beta) \circ (xExp(s\beta;s\beta)))\ .$$

(v) On a

$$Exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n;\beta\right) = e^{\alpha_0}\ Exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n;\beta\right)\ .$$

(vi) On a pour tout $K \in \mathbb{C}^*$

$$Exp(\alpha \circ (Kx);\beta \circ (Kx)) = Exp(\alpha;\beta) \circ (Kx)\ .$$

Remarque 6.6 *À cause de l'assertion (ii), on peut considérer l'application $(\alpha,\beta) \longmapsto Exp(\alpha;\beta)$ comme une déformation paramétrée par $\beta \in \mathbb{C}[[x]]$ de la fonction exponentielle usuelle*

$$\alpha \longmapsto e^\alpha = Exp(\alpha;0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\ .$$

L'assertion (iv) se spécialise par exemple en

$$xExp(2\alpha;2\alpha) = (xExp(\alpha;\alpha)) \circ (xExp(\alpha;\alpha))$$

ce qui correspond bien à la loi de groupe sur le sous-groupe $\varphi_{0,1,0}(\mathcal{D}) = \{(A, xA) \mid A \in \mathcal{U}\} \sim \mathcal{D}$ de $\mathcal{I}$.

L'assertion (v) est triviale : Elle exprime seulement le fait que la matrice $exp(u_{\alpha_0}) = e^{\alpha_0} id$ est centrale dans $\rho(\mathcal{I})$.

L'assertion (vi) (équivariance de Exp par rapport aux homothéties inversibles $x \longmapsto Kx$ de $\mathbb{C}$) provient de l'automorphisme intérieur (de $\mathcal{I}$ et de $\mathfrak{i}$) donné en conjugant par la matrice diagonale $exp(d_{log(K)})$, voir aussi remarque 2.3.

Preuve de la proposition 6.5 L'assertion (i) suit de la structure de produit semi-direct sur $\mathcal{I}$. On peut également s'en convaincre en considérant l'homomorphisme $\varphi_{0,\lambda,0}(C,\gamma) = (C\left\{\frac{\gamma}{x}\right\}^\lambda, \gamma)$ pour $\lambda \in \mathbb{N}$ grand. On obtient ainsi l'identité

$$C\left\{\frac{\gamma}{x}\right\}^\lambda = \mathrm{Exp}(\alpha + \lambda\beta; \beta)$$

si $\exp(u_\alpha + d_\beta) = (C, \gamma)$. On a donc

$$\gamma = x \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Exp}(\alpha + n\beta; \beta))^{1/n} \quad .$$

L'assertion (ii) est l'observation que $\mathfrak{u} = \{u_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}[[x]]\}$ est l'algèbre de Lie du groupe commutatif $\mathcal{U}$.

L'assertion (iii) traduit le fait que $\varphi_{\kappa,\lambda,\mu}$ est un endomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{i}$, voir la remarque 2.3.

L'assertion (iv) suit de la loi de groupe sur $\mathcal{I}$.

L'assertion (v) est une conséquence du fait que u_1 est la matrice identité.

L'assertion (vi) provient de la conjugaison par la matrice diagonale de coefficients diagonaux $1, K, K^2, K^3, \ldots$ une progression géométrique. □

Exemple Pour $\alpha = \beta = x \in \mathbb{C}[[x]]$, nous avons $\mathrm{Exp}(x; x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n$ car

$$\exp(u_x + d_x) = \exp\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 0 & & \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

est la matrice triangulaire inférieure unipotente associée au triangle de Pascal.

7 Équations différentielles

Proposition 7.1 *(i) Pour $\alpha = \sum_{n=N_\alpha}^\infty \alpha_n x^n, \beta = \sum_{n=N_\beta}^\infty \beta_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ avec $\alpha_{N_\alpha}, \beta_{N_\beta} \in \mathbb{C}^*$ et $N_\beta < \infty$, les séries formelles $y = Exp(\alpha; \beta), z = Exp(\beta; \beta) \in \mathbb{C}[[x]]$ sont les solutions formelles uniques du système d'équations différentielles*

$$\begin{cases} x\beta y' = y\{\alpha \circ (xz) - \alpha\} \\ x\beta z' = z\{\beta \circ (xz) - \beta\} \end{cases}$$

qui vérifient

$$y = \begin{cases} e^{\alpha_0} + \mathfrak{m} & \text{si } \alpha_0 \neq 0 \\ 1 + \frac{e^{N_\alpha \beta_0} - 1}{N_\alpha \beta_0} \alpha_{N_\alpha} x^{N_\alpha} + \mathfrak{m}^{N_\alpha + 1} & \text{sinon} \end{cases}$$

(avec la convention $\frac{e^{N_\alpha\beta_0}-1}{N_\alpha\beta_0}=1$ *si* $N_\alpha\beta_0=0$*) et*

$$z=\begin{cases} e^{\beta_0}+\mathfrak{m} & si\ \beta_0\neq 0 \\ 1+\beta_{N_\beta}x^{N_\beta}+\mathfrak{m}^{N_\beta+1} & sinon \end{cases}$$

(ii) Les fonctions

$$\begin{array}{rcl} y_s & = & Exp(s\alpha;s\beta) \\ y'_s & = & \frac{d}{dx}Exp(s\alpha;s\beta) \\ z_s & = & Exp(s\beta;s\beta) \\ z'_s & = & \frac{d}{dx}Exp(s\beta;s\beta) \end{array}$$

sont solution du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}y_s & = & \alpha y_s+x\alpha y'_s=y_s\alpha\circ(xz_s) \\ \frac{\partial}{\partial s}z_s & = & \beta z_s+x\beta z'_s=z_s\beta\circ(xz_s)\ . \end{cases}$$

Remarque 7.2 *Le paramètre* s *se simplifie dans le système d'équations différentielles*

$$\begin{cases} x\beta y'=y\{\alpha\circ(xz)-\alpha\} \\ x\beta z'=z\{\beta\circ(xz)-\beta\} \end{cases}$$

pour $y=Exp(s\alpha;s\beta)$ *et* $z=Exp(s\beta;s\beta)$*. Le paramètre* s *n'intervient donc que dans les conditions initiales.*

Le système d'équations différentielles pour $y_s=Exp(s\alpha;s\beta)$ *et* $z_s=Exp(s\beta;s\beta)$ *est autonome en* s *car il provient d'un flot sur le groupe de Lie* $\rho(\mathcal{I})$*.*

Sous des hypothèses de convergence convenables, le calcul d'une évaluation en $x=x_0\in\mathbb{C}$ *de* $y=Exp(\alpha;\beta)$ *peut également se faire en déterminant la valeur en* $s=1$ *de la fonction* $u=u(s)$ *pour* u,w *les fonctions (correspondantes à l'évaluation en* $x=x_0$ *de* $Exp(s\alpha;s\beta)$ *et* $Exp(s\alpha;s\beta)$*) déterminées par le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u'=u\ \alpha\circ(x_0w) \\ w'=w\ \beta\circ(x_0w) \end{cases}$$

avec conditions initiales $u(0)=w(0)=1$*.*

Exemple (i) $\mathrm{Exp}(sx;s)=e^{(e^s-1)x}=1+(e^s-1)x+\frac{(e^s-1)^2}{2}2x^2+\ldots$. En effet, posons $y=e^{(e^s-1)x}=1+(e^s-1)x+\ldots$ et $z=e^s$. Les fonctions y et z vérifient alors le système d'equations différentielles

$$\begin{cases} xsy'=y\{sxe^s-sx\} \\ xsz'=z\{s-s\}=0 \end{cases}$$

(où l'on dérive par rapport à la variable x) correspondant à $\alpha=sx$ et $\beta=s$. De plus, on a $N_\alpha=1,\alpha_1=s,N_\beta=0,\beta_0=s$ et y,z sont donc bien de la

forme $y \in 1 + \frac{e^{1\cdot s}-1}{1\cdot s} sx + \mathfrak{m}^2$, $z \in e^s + \mathfrak{m}$, voir aussi la remarque 6.4 pour l'égalité $z = e^s = \mathrm{Exp}(s; s)$.

(ii) La fonction $y = \mathrm{Exp}\left(\frac{x}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right)$ est l'unique solution de la forme $y \in 1 + x + \mathfrak{m}^2$ de l'équation différentielle

$$x\frac{x}{1-x}y' = y\left\{\frac{xy}{1-xy} - \frac{x}{1-x}\right\}$$

(correspondante à $\beta = x/(1-x)$) qui se simplifie en

$$x\{1-xy\}y' = y\{y-1\} \ .$$

La suite $c_0 = y(0), c_1 = y'(0), c_2 = y''(0), \ldots, c_n = y^{(n)}(0), \ldots$ des dérivées en 0 de la solution $y(x) = \mathrm{Exp}\left(\frac{x}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$ commence par

$$1, 1, 4, 27, 260, 3270, 50904, 946134, 20462896, \ldots \ .$$

La suite $\tilde{c}_1 = -\left(\frac{1}{y}\right)', \tilde{c}_2 = -\left(\frac{1}{y}\right)'', \ldots, \tilde{c}_n = -\left(\frac{1}{y}\right)^{(n)}, \ldots$ associée aux dérivées d'ordre ≥ 1 de $\frac{1}{y} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \frac{x^n}{n!}$ admet une interprétation combinatoire et correspond à la suite A38037 dans [2].

Preuve de la proposition 7.1 L'assertion (iv) de la proposition 6.5 donne

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{Exp}((s+t)\alpha; (s+t)\beta)|_{s=0} = \alpha\ \mathrm{Exp}(t\alpha; t\beta) + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{Exp}(t\alpha; t\beta)\right)\{x\beta\} \ .$$

On trouve de même

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Exp}((s+t)\alpha; (s+t)\beta)|_{t=0} = \mathrm{Exp}(s\alpha; s\beta)\alpha \circ (x\mathrm{Exp}(s\beta; s\beta)) \ .$$

En posant $t = s = 1, y = \mathrm{Exp}(\alpha; \beta), z = \mathrm{Exp}(\beta; \beta)$ et en égalant les deux identités, on trouve la première équation du système différentiel. La preuve pour la deuxième équation est analogue.

La forme des solutions vient de la définition de y, respectivement de z, comme série génératrice de la première colonne de $\exp(u_\alpha + d_\beta)$, respectivement de $\exp(u_\beta + d_\beta)$, et du petit calcul

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_{N_\alpha} & N_\alpha\beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{N_\alpha}\frac{e^{N_\alpha\beta_0}-1}{N_\alpha\beta_0} & e^{N_\alpha\beta_0} \end{pmatrix} \ .$$

Ceci termine la preuve de l'assertion (i).

L'assertion (ii) est une conséquence facile de ce qui précède. □

Remarque 7.3 *Le système différentiel de la proposition 7.1 dégénère pour $\beta = 0$. Ceci est dû au fait qu'il a été dérivé par l'utilisation de la non-commutativité du groupe $\mathcal{I}$.*

7.1 La fonction x Exp$(\beta;\beta)$

L'application $\beta \longmapsto x$ Exp$(\beta;\beta)$ correspond à l'exponentielle entre la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{i}$ et le groupe de Lie $\mathcal{D}$, identifié au sous-groupe formé des éléments $(1,\alpha),\ \alpha \in \mathcal{D}$ dans $\mathcal{I}$.

Proposition 7.4 *Soit $\beta \in \mathbb{C}[[x]]$ une série formelle non-nulle pour laquelle la série formelle de Laurent $\frac{1}{x\beta}$ est sans résidu pour le pôle à l'origine. Alors*

$$F(x\ Exp(s\beta;s\beta)) = F(x) + s$$

pour F une primitive de $\frac{1}{x\beta}$.

Ce résultat reste valable pour une série formelle $\beta \in \mathbb{C}[[x]]$ quelconque pour une détermination convenable du logarithme après simplification de la singularité essentielle due au résidu.

Corollaire 7.5 *Si $\frac{1}{x\beta}$ admet une primitive méromorphe algébrique pour $\beta \in \mathfrak{m}$, alors $Exp(s\beta;s\beta)$ est algébrique.*

En particulier, $Exp(s\beta;s\beta)$ est algébrique pour $\beta \in x\mathbb{C}[[x]]$ une fraction rationelle telle que $\frac{1}{x\beta}$ est sans résidu en tout point de $\mathbb{C}$.

Remarque 7.6 *La série de Laurent $\frac{1}{x\beta}$ possède un pôle d'ordre 1 à l'origine si $\beta = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots$ avec $\beta_0 \neq 0$. La partie singulière de F provient alors de $\frac{1}{\beta_0} log(x)$ et on a*

$$\frac{1}{\beta_0} log(x\ Exp(s\beta;s\beta)) - \frac{1}{\beta_0} log(x) = \frac{1}{\beta_0} log(Exp(s\beta;s\beta))$$
$$= \frac{1}{\beta_0} log(e^{s\beta_0}(1+\ldots)) = s + log(1+\ldots) \in s + \mathfrak{m}$$

qui est une série formelle ordinaire en 0.

Dans le cas d'une singularité $r\,log(x)$ de F provenant du résidu d'un pôle multiple à l'origine, on a $\beta \in \mathfrak{m}$ et le calcul

$$r\ log(x\ Exp(s\beta;s\beta)) - r\ log(x) = r\ log(Exp(s\beta;s\beta))$$
$$= r\ log(1 + b_1 x + \ldots) \in \mathfrak{m}$$

montre également que les singularités essentielles des deux côtés se simplifient dans la proposition 7.4

Preuve de la proposition 7.4 Le changement de variable $Z = xz = x$ Exp$(\beta;\beta)$ transforme l'équation différentielle $x\beta z' = z\{\beta \circ (xz) - \beta\}$ de la proposition 7.1 en

$$xZ'\beta(x) = Z\beta(Z)$$

qui est à variables séparées. Après intégration, on obtient

$$F(x\ \mathrm{Exp}(s\beta;s\beta)) = F(x) + h(s)$$

pour F tel que $F' = \frac{1}{x\beta}$ et où $h(s)$ ne dépend que de s. Dans le cas où $\frac{1}{x\beta}$ est sans résidu à l'origine, on a

$$F(x) = -\frac{1}{N\beta_N x^N} + \ldots \in \frac{1}{x^N}\mathbb{C}[[x]]$$

si $\beta = \sum_{n=N}^{\infty} \beta_n x^n$ avec $\beta_N \neq 0$ pour un certain entier $N \geq 1$. En utilisant la condition initiale $x\ \mathrm{Exp}(s\beta; s\beta) = x + s\beta_N x^{N+1} + \ldots$ on obtient

$$[x^0]F(x\ \mathrm{Exp}(s\beta; s\beta)) = [x^0]\left(-\frac{1}{N\beta_N x^N}\left(1 - s\beta_N x^N\right)^N\right) = s$$

ce qui montre $h(s) = s$ et démontre le résultat dans le cas où $\frac{1}{x\beta}$ est sans résidu.

Dans le cas $\beta \in \mathfrak{m}$ et $\frac{1}{x\beta}$ a un résidu non-nul, la fonction $h(s)$ peut s'évaluer en calculant la limite $x \to 0$ et le résultat suit de l'égalité

$$\log(x\ \mathrm{Exp}(s\beta; s\beta)) = \log(x) + \log(\mathrm{Exp}(s\beta; s\beta)) = \log(x) + \log(1 + s\beta_1 x + \ldots) = .$$

Dans le cas où $\beta = \beta_0 + \ldots$ avec $\beta_0 \neq 0$, on a $F = \frac{1}{\beta_0}\log(x) + \mathfrak{m}$ et on obtient encore $h(s) = s$. □

Preuve du corollaire 7.5 La preuve de la première partie est immédiate. La deuxième partie suit de l'observation qu'une primitive d'une telle fraction rationelle est une fraction rationelle. □

Exemples (i) Cet exemple est inspiré du chapitre 3 de [1] où il est considéré à cause de son intérêt pour la biologie moléculaire, voir les références indiquées dans [2] pour la suite A4148. On a

$$\mathrm{Exp}\left(s\frac{x}{1-x^2}; s\frac{s}{1-x^2}\right) = \frac{1 - sx + x^2 - \sqrt{1 - 2sx + (s^2-2)x^2 - 2sx^3 + x^4}}{2x^2}\ .$$

En effet, il suffit de vérifier l'égalité de la proposition 7.4 avec $F = -\frac{1}{x} - x$ une primitive de $\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^{-1} = \frac{1-x^2}{x^2}$.

Pour $s = 1$, on obtient la série

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 17x^6 + 37x^7 + 82x^8 +$$

dont la suite des coefficients est A4148 de [2].

(ii) Plus généralement, les fractions rationnelles $\beta = \frac{x(1+x^2)^k}{1-x^{2(k+1)}}$ semblent satisfaire les conditions du corollaire 7.5 pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Les cas $k = 0$ et $k = 1$ redonnent l'exemple ci-dessus.

Pour $k = 2, 3$ la fonction

$$Z = x\ \mathrm{Exp}\left(s\frac{x(1+x^2)^k}{1-x^{2(k+1)}}; s\frac{x(1+x^2)^k}{1-x^{2(k+1)}}\right)$$

satisfait l'équation algébrique

$$x(1+x^2)(1+(k+1)Z^2+Z^4) \\ -(1-sx+(k+1)x^2-sx^3+x^4)Z(1+Z^2)\ .$$

Le cas $k=2,\ s=1$ donne

$$Z = x+x^2+x^3+3x^4+7x^5+14x^6+33x^7+81x^8+\dots$$

et correspond à la fonction algébrique

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right)\circ\left(\frac{(1-x+x^2)-\sqrt{1-2x-x^2-2x^3+x^4}}{2x}\right)\circ\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\ .$$

Le développement en série de Z pour $k=3,\ s=1$ commence par

$$Z = x+x^2+x^3+4x^4+10x^5+22x^6+61x^7+165x^8+\dots\ .$$

8 Un développement en série pour $\mathbf{Exp}(s\alpha; s\beta)$

Pour $\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n, \beta=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ deux séries formelles, posons $g_0=1$ et définissons ensuite les séries $g_1, g_2, \dots \in \mathbb{C}[[x]]$ (qui dépendent de α et de β) récursivement par la formule

$$g_{n+1} = \alpha g_n + x\beta g_n' \in \mathbb{C}[[x]]$$

où $g_n' \in \mathbb{C}[[x]]$ est la série dérivée de g_n.

Proposition 8.1 *On a pour tout $s\in\mathbb{C}^*$ l'égalité*

$$Exp(s\alpha; s\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{s^n}{n!}\ .$$

Remarque 8.2 *La proposition 8.1 peut également s'énoncer sous la forme*

$$Exp(s\alpha; s\beta) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\left(\alpha + x\beta\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)1\ .$$

Remarque 8.3 *Le coefficient $[x^N]Exp(\alpha;\beta)$ ne dépend que de $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ et de $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{N-1}$. De plus, pour $\alpha, \beta \in \mathfrak{m} = x\mathbb{C}[[x]]$, cette dépendance est polynomiale car $g_n \in \mathfrak{m}^n$.*

Remarque 8.4 *La formule $Exp(s\alpha; s\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{s^n}{n!}$ ne pose jamais de problème de divergences pour le calcul des coefficients $[x^N]Exp(\alpha;\beta)$. En effet, la majoration facile*

$$|[x^N]g_{n+1}| \leq \left(\sum_{k=0}^{N}|[x^k]g_n|\right)\left(\sum_{k=0}^{N}|\alpha_k| + N\sum_{k=0}^{N-1}|\beta_k|\right)$$

implique les majorations

$$|[x^N]Exp(s\alpha; s\beta)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |[x^N]g_n| \frac{|s|^n}{n!} \leq e^{A_N|s|}$$

pour $A_N = \sum_{k=0}^{N} |\alpha_k| + N \sum_{k=0}^{N-1} |\beta_k|$.

Remarque 8.5 *Les formules pour le calcul de* $Exp(s\alpha; s\beta)$ *données par la proposition 8.1 sont particulièrement jolies dans le cas*

$$Exp(s(x\beta)'; s\beta) = Exp(s(\beta + x\beta'); s\beta) = \frac{d}{dx}\left(x\ Exp(s\beta; s\beta)\right)$$

(voir l'assertion (iii) de la proposition 6.5 pour la dernière égalité) où l'on obtient $Exp(s(x\beta)'; s\beta) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} x\beta\right)\right) 1 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{s^n}{n!}$ *avec* $g_0 = 1$ *et* $g_{n+1} = \beta g_n + x\beta' g_n + x\beta g_n' = (x\beta g_n)'$.

Preuve de la proposition 8.1 La démonstration consiste à calculer la série génératrice de la première colonne dans la matrice

$$\exp(su_\alpha + sd_\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_\alpha + d_\beta)^n \frac{s^n}{n!} \ .$$

Montrons par récurrence sur n que le coefficient de s^n dans cette série est donnée par $\frac{g_n}{n!}$. Ceci est trivialement vrai pour $n = 0$ car $(u_\alpha + d_\beta)^0$ est la matrice identité par convention. Désignons par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures dont la première colonne est identiquement zéro. Il suffit alors de démontrer l'identité

$$(u_\alpha + d_\beta)u_{g_n} = u_{g_{n+1}} \pmod{\mathcal{C}} \ .$$

Or elle résulte du calcul

$$\begin{aligned} (u_\alpha + d_\beta)u_{g_n} &\equiv u_\alpha u_{g_n} + d_\beta u_{g_n} - u_{g_n} d_\beta \pmod{\mathcal{C}} \\ &= u_{\alpha g_n} + [d_\beta, u_{g_n}] \\ &= u_{\alpha g_n} + u_{x\beta g_n'} = u_{g_{n+1}} \end{aligned}$$

car $u_{g_n} d_\beta \in \mathcal{C}$ et $[d_\beta, u_{g_n}] = u_{x\beta g_n'}$ par les formules du théorème 5.1. □

Exemple Pour $\alpha = \beta = x$, on obtient facilement $g_n = n! x^n$ par récurrence sur n. On a donc $\mathrm{Exp}(sx; sx) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \frac{s^n}{n!} = \frac{1}{1-sx}$ ou encore $\mathrm{Exp}(s\kappa x; sx) = \left(\frac{1}{1-sx}\right)^{\kappa}$ en utilisant l'assertion (iii) de la proposition 6.5. Plus généralement, on a $\mathrm{Exp}(s\kappa x^a; sx^a) = \left(\frac{1}{1-sax^a}\right)^{\kappa/a}$ pour $a \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

9 Fonctions réciproques

Considérons les polynômes $P_1 = 1, P_2 = 1 + x, P_3 = 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{2}, \ldots, P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(nx)^{k-1}}{k!}, \ldots \subset \mathbb{Q}[x]$. Notons $\mathcal{R}_n = \{\xi \in \mathbb{C} \mid P_n(\xi) = 0\}$ l'ensemble des racines de P_n et considérons la réunion dénombrable $\mathcal{R} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n \subset \mathbb{C}$. Remarquons l'inégalité $\frac{(2n)^k}{(k+1)!} \geq 2\frac{(2n)^{k-1}}{k!}$ pour $k < n$, qui implique l'inclusion $\mathcal{R} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \parallel z \parallel < 2\}$.

Théorème 9.1 *(i) Pour $\beta \in \mathbb{C}[[x]]$ avec $\beta_0 \notin \mathcal{R}$ et $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n \in \mathcal{U} = \mathbb{C}^* + \mathfrak{m}$ donnés, il existe $\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$ tel que $Exp(\alpha; \beta) = \gamma$.*

De plus, si $Exp(\alpha; \beta) = Exp(\tilde{\alpha}; \beta)$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{\alpha} = \alpha + 2ik\pi$.

(ii) Pour $\gamma \in \mathcal{U} = \mathbb{C}^* + \mathfrak{m}$ fixé, il existe $\beta \in \mathbb{C}[[x]]$ tel que $Exp(\beta; \beta) = \gamma$.

De plus, si $Exp(\beta; \beta) = Exp(\tilde{\beta}; \tilde{\beta})$ avec $\beta = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_n x^n, \tilde{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_n x^n$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{\beta}_0 = \beta_0 + 2ik\pi$.

Corollaire 9.2 *L'application de $\mathbb{C}[[x]] \times \mathbb{C}[[x]]$ dans $\mathcal{I}$ définie par*

$$(\alpha, \beta) \longmapsto (Exp(\alpha; \beta), xExp(\beta; \beta))$$

est surjective.

Sa restriction à $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ est une bijection entre $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ et $\mathcal{SI}$.

Remarque 9.3 *(i) (cf. remarque 6.4) Pour $\beta = 0$ et $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n \in \mathcal{U}$, une série $\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$ telle que $Exp(\alpha; 0) = \gamma$ est de la forme $log(\gamma_0) log\left(\frac{1}{\gamma_0}\gamma\right)$ où $log(\gamma_0) \in \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme et où $log\left(\frac{1}{\gamma_0}\gamma\right) \in \mathfrak{m}$ est la détermination principale du logarithme de $\frac{1}{\gamma_0}\gamma \in \mathcal{SU} = 1 + \mathfrak{m}$.*

(ii) Si $Exp(\beta; \beta) = Exp(\tilde{\beta}; \tilde{\beta})$ avec $\beta = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_n x^n, \tilde{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_n x^n$, alors les différences $\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_n$ ne sont généralement pas nulles pour $n \geq 1$.

Preuve du théorème 9.1 Prouvons l'assertion (i) en supposant d'abord $\gamma \in 1+\mathfrak{m}$. La suite $g_0, g_1, \ldots \in \mathbb{C}[[x]]$ définie par $g_0 = 1$ et $g_{n+1} = \alpha g_n + x\beta g_n'$ à partir de $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n \in \mathfrak{m}$ vérifie $g_n \in \mathfrak{m}^n$. Pour β fixé, le coefficient $[x^n]\mathrm{Exp}(\alpha; \beta)$ est alors un polynôme en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Le coefficient α_n de α n'intervient que de façon linéaire dans $[x^n]\mathrm{Exp}(\alpha; \beta)$ et un petit calcul montre que sa contribution est donnée par

$$\alpha_n \left(\frac{1}{1!} + \frac{n\beta_0}{2!} + \ldots + \frac{(n\beta_0)^{n-1}}{n!} \right) = \alpha_n P_n(\beta_0) \ .$$

Comme $P_n(\beta_0) \neq 0$ pour tout n, cette équation linéaire se résoud toujours et on peut donc déterminer récursivement les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de manière à avoir $\mathrm{Exp}(\alpha; \beta) = \gamma$.

L'assertion (v) de la proposition 6.5 permet de ramener le cas général $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n \in \mathcal{U}$ au cas particulier $\frac{1}{\gamma_0}\gamma \in \mathcal{SU} = 1 + \mathfrak{m}$ déjà traité. Ceci termine la preuve de l'assertion (i).

Pour démontrer l'assertion (ii), on commence par choisir $\beta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$ tel que $e^{\beta_0} = \gamma_0$. Ceci est toujours possible car l'ensemble $\mathcal{R}$ est borné. On procède ensuite comme ci-dessus. Plus précisément, on résoud l'équation

$$\mathrm{Exp}(\beta - \beta_0; \beta) = e^{-\beta_0}\gamma$$

en remarquant que la contribution de β_n au polynôme $[x^n]\mathrm{Exp}(\beta - \beta_0; \beta)$ en $\beta_0, \ldots, \beta_n$ est encore donné par $\beta_n P_n(\beta_0)$ pour $n \geq 1$. □

Preuve du corollaire 9.2 Soit $(C, \gamma) \in \mathcal{I}$ avec $C \in \mathcal{U}$ et $\gamma \in \mathcal{D}$. L'assertion (ii) du théorème 9.1 permet de trouver $\beta \in \mathbb{C}[[x]]$ avec $\beta_0 \notin \mathcal{R}$ et $x\,\mathrm{Exp}(\beta; \beta) = \gamma$. On utilise ensuite l'assertion (i) pour déterminer $\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$ tel que $\mathrm{Exp}(\alpha; \beta) = C$. Pour $(C, \gamma) \in \mathcal{SI}$ on peut prendre l'unique solution (α, β) dans $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$. □

Remarque 9.4 *La preuve du théorème 9.1 fournit un algorithme de calcul pour α (respectivement β) tel que $Exp(\alpha; \beta) = \gamma$ (respectivement $Exp(\beta; \beta) = \gamma$) pour β, γ (respectivement γ) convenable. En effet, soit $\tilde{\alpha} \in \mathbb{C}[[x]]$ une série telle que $e^{\tilde{\alpha}_0} = \gamma_0$ et $\gamma - Exp(\tilde{\alpha}; \beta) \equiv E_n x^n \pmod{\mathfrak{m}^{n+1}}$ pour un entier $n \geq 1$. Alors la série*

$$\overline{\alpha} = \tilde{\alpha} + \frac{1}{\gamma_0} E_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(n\beta_0)^{k-1}}{k!} \right)^{-1} x^n$$

vérifie $\gamma - Exp(\overline{\alpha}; \beta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^{n+2}}$.

De manière similaire, soit $\tilde{\beta} \in \mathbb{C}[[x]]$ une série telle que $e^{\beta_0} = \gamma_0$ et $Exp(\tilde{\beta}; \tilde{\beta}) \equiv E_n x^n \pmod{\mathfrak{m}^{n+1}}$. Alors la série

$$\overline{\beta} = \tilde{\beta} + \frac{1}{\gamma_0} E_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(n\beta_0)^{k-1}}{k!} \right)^{-1} x^n$$

vérifie $\gamma - Exp(\overline{\beta}; \overline{\beta}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^{n+2}}$.

Remarque 9.5 *Pour $(C, \gamma) \in \mathcal{SI}$, les séries $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ telles que $C = Exp(\alpha; \beta), \gamma = x\ Exp(\beta; \beta)$ peuvent également se calculer en prenant la série génératrice de la première colonne des logarithmes matriciels*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\rho(C, \gamma) - id)^n}{n} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\rho(\gamma/x, \gamma) - id)^n}{n}$$

des matrices triangulaires inférieures unipotentes $\rho(C, \gamma)$ et $\rho(\gamma/x, \gamma)$.

Exemples La série formelle $\beta \in \mathfrak{m}$ telle que $\mathrm{Exp}(\beta;\beta) = 1+x$ commence par

$$\beta = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{31}{6}x^5 - \frac{157}{15}x^6 + \frac{649}{30}x^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n \frac{x^{n+1}}{n!}$$

avec $A_0, A_1, \ldots$ donnés par $1, 1, 3, 16, 124, 1256, 15576, 226248, 3729216, \ldots$, voir la suite A5119 dans [2] et la formule (109) dans l'article [4] dans lequel la série formelle $x\beta$ est appelée le "générateur infinitésimal" de $x\mathrm{Exp}(\beta;\beta) \in \mathcal{SD}$ (et qui indique dans la formule (109) également les premiers termes de $x\mathrm{Exp}(s\beta; s\beta)$).

On peut également déterminer $\beta(x)$ en utilisant l'équation différentielle $xZ'\beta(x) = Z\beta(Z)$ (voir la preuve de la proposition 7.4) qui se simplifie en

$$(1+2x)\beta(x) = (1+x)\beta(x+x^2)$$

pour $Z = x(1+x) = x + x^2 = x\ \mathrm{Exp}(\beta;\beta)$.

Les coefficients de la matrice

$$\exp(u_\beta + d_\beta) = \rho(1+x, x+x^2) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & 1 & 3 & 1 & & & \\ & & 3 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 6 & 5 & 1 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{I}$$

sont donnés par

$$\big(\rho(1+x, x+x^2)\big)_{i,j} = \binom{j+1}{i-j} = [x^i]\left((1+x)(x+x^2)^j\right),\ 0 \le i, j\ .$$

La matrice inverse

$$\rho\left(-\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2x}, -\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -1 & 1 & & & & & \\ 2 & -2 & 1 & & & & \\ -5 & 5 & -3 & 1 & & & \\ 14 & -14 & 9 & -4 & 1 & & \\ -42 & 42 & -28 & 14 & -5 & 1 & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

avec coefficients non-nuls $(A^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j}\binom{2i-j}{i-j} - \binom{2i-j}{i-j-1} = (-1)^{i+j}\frac{j+1}{i+1}\binom{2i-j}{i-j}$ pour $0 \le j \le i$ fait intervenir la fonction génératrice

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!\ (n+1)!}x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \ldots$$

des nombres de Catalan et s'obtient à un signe près en lisant les coefficients du triangle de Catalan

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
& 1 & & & & & & & & & \\
1 & & 1 & & & & & & & & \\
& 2 & & 1 & & & & & & & \\
2 & & 3 & & 1 & & & & & & \\
& 5 & & 4 & & 1 & & & & & \\
5 & & 9 & & 5 & & 1 & & & & \\
& 14 & & 14 & & 6 & & 1 & & & \\
14 & & 28 & & 20 & & 7 & & 1 & &
\end{array}$$

(avec coefficients $C_{i,j},\ 0 \leq i,j$ donnés par $\binom{i}{\frac{i-j}{2}} - \binom{i}{\frac{i-j}{2}-1}$ si $i \equiv j \pmod 2$ et $C_{i,j} = 0$ sinon) le long de droites affines de pente 1.

Pour $\mathrm{Exp}(\beta;\beta) = e^x$ on trouve

$$\beta = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{12}x^3 - \frac{5}{12}x^4 + \frac{107}{240}x^5 - \frac{173}{360}x^6 + \frac{7577}{15120}x^7 + \ldots,$$

en accord avec la formule (109)' (qui donne les premiers termes de $x\beta$) dans [4].

10 Convergence

Théorème 10.1 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[x]]$ deux séries formelles définissant des fonctions holomorphes dans un ouvert connexe (mais pas nécessairement simplement connexe) $\mathcal{O}$ contenant l'origine. Alors il existe un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^2$ contenant $\mathcal{O} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{C}$ tel que $Exp(s\alpha; s\beta)$ est holomorphe pour $(x,s) \in \mathcal{V}$.*

Corollaire 10.2 *Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[x]]$ deux fonctions holomorphes dans un ouvert connexe $\mathcal{O}$ contenant l'origine, le développement en série en un point $(\xi, 0) \in \mathcal{O} \times \{0\}$ de la fonction holomorphe $Exp(s\alpha; s\beta) \circ (x+\xi)$ est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{s^n}{n!}$$

où $G_0 = 1$ et $G_{n+1} = \{\alpha \circ (x+\xi)\}G_n + (x+\xi)\{\beta \circ (x+\xi)\}G_n'$ où $\alpha \circ (x+\xi)$ et $\beta \circ (x+\xi)$ sont les développements en série au point $\xi \in \mathcal{O}$ des fonctions holomorphes α et β.

Pour $K \in \mathbb{C}^*$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ deux nombres complexes, considérons les séries formelles $G_0, G_1, G_2, \ldots \in \mathbb{C}[[x]]$ définies récursivement par $G_0 = 1$ et $G_{n+1} = \left(\left(\frac{K}{1-Kx}\right)^a G_n\right)'$. Le résultat suivant sera utile dans la preuve du théorème 10.1.

Lemme 10.3 *On a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{s^n}{n!} = \left(\frac{1}{1 - s(a+1)\left(\frac{K}{1-Kx}\right)^{a+1}} \right)^{a/(a+1)}$$

et cette série converge pour $(x,s) \in \mathbb{C}^2$ *tel que* $|x| < \frac{1}{K}\left(1 - K\left((a+1)|s|\right)^{1/(a+1)}\right)$.

Preuve Une récurrence sur n montre l'égalité

$$G_n = \left(\prod_{j=1}^{n} (j(a+1) - 1) \right) \left(\frac{K}{1-Kx} \right)^{n(a+1)} .$$

Le théorème binomial $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ appliqué à l'identité

$$\left(\prod_{j=1}^{n} (j(a+1) - 1) \right) = n!(-1-a)^n \binom{-a/(a+1)}{n}$$

montre

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{s^n}{n!} = \left(\frac{1}{1 - s(a+1)\left(\frac{K}{1-Kx}\right)^{a+1}} \right)^{a/(a+1)}$$

avec convergence de la série pour $(x,s) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\left| s(a+1)\left(\frac{K}{1-Kx}\right)^{a+1} \right| < 1$. □

Preuve du théorème 10.1 Montrons d'abord que la série $\mathrm{Exp}(s\alpha; s\beta)$ définit une fonction holomorphe pour (x,s) proche de $(0,0)$.

La proposition 8.1 montre qu'il suffit pour cela de prouver l'analyticité en $(0,0)$ d'une fonction $\mathrm{Exp}(s\tilde{\alpha}; s\tilde{\beta})$ avec $\tilde{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_n x^n, \tilde{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$ des fonctions holomorphes à l'origine telles que $|\alpha_n| \leq \tilde{\alpha}_n,\ |\beta_n| \leq \tilde{\beta}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme α, β sont holomorphes en 0, on peut trouver $K \geq 1$ tel que $|\alpha_n| \leq (n+1)K^{n+2}, |\beta_n| \leq K^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de montrer que la fonction $\mathrm{Exp}\left(s\left(\frac{K}{1-Kx}\right)^2 ; s\frac{K}{1-Kx} \right)$ est analytique en $(0,0)$. Les séries associées $g_0, \ldots, g_{n+1} = \left(\frac{K}{1-Kx}\right)^2 g_n + x\frac{K}{1-Kx} g_n', \ldots$ n'ont que des coefficients positifs et l'inégalité $K \geq 1$ implique que leurs coefficients sont majorés par les coefficients des séries $G_0 = 1, \ldots, G_{n+1} = \left(\frac{K}{1-Kx} G_n\right)' = \left(\frac{K}{1-Kx}\right)^2 G_n + \frac{K}{1-Kx} G_n', \ldots$. Le lemme 10.3 permet donc de minorer le rayon de convergence de $\mathrm{Exp}(s\alpha; s\beta)$ et assure l'analyticité en $(0,0)$ de la fonction $\mathrm{Exp}(s\alpha; s\beta)$.

Pour un point $(\xi, 0)$ proche de $(0, 0)$, la proposition 8.1 montre par continuation analytique l'égalité $\mathrm{Exp}(s\alpha; s\beta) \circ (x + \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n,\xi} \frac{s^n}{n!}$ avec $g_{0,\xi} = 1, \ldots, g_{n+1,\xi} = \{\alpha \circ (x + \xi)\} g_{n,\xi} + (x + \xi)\{\beta \circ (x + \xi)\} g'_{n,\xi}$ pour le développement en série au voisinage d'un point $(\xi, 0)$ convenable. La minoration du rayon de convergence de cette série par le lemme 10.3 montre que ce développement est valable pour tout ξ dans l'ouvert connexe $\mathcal{O}$.

Pour montrer l'analyticité de $\mathrm{Exp}(s\alpha; s\beta)$ dans un voisinage ouvert de $\mathbb{C} \times \{0\}$, on utilise la loi de groupe sur $\mathcal{I}$ en appliquant itérativement l'assertion (iv) de la proposition 6.5. □

Le corollaire 10.2 a été démontré au cours de la preuve du théorème 10.1.

Remarque 10.4 *On peut également donner une preuve du théorème 10.1 et du corollaire 10.2 en utilisant les majorations de la remarque 8.4.*

11 Une application à la combinatoire énumérative

Pour $W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{C}[[X]]$ une série formelle, considérons la série formelle $Z = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{s^n}{n!}$ où la suite $G_0, G_1, \ldots \in \mathbb{C}[[X]]$ est définie récursivement par $G_0 = 1$ et $G_{n+1} = (WG_n)'$.

Notons $Z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} [X^0] G_n \frac{s^n}{n!} \in \mathbb{C}[[s]]$ l'évaluation en $X = 0$ de Z. Dans ce chapitre nous décrivons d'abord une interprétation combinatoire des coefficients de Z_0 en exprimant Z_0 comme fonction de partition d'un modèle à spins. Ensuite nous montrons qu'une primitive de Z_0 est formellement solution d'une équation différentielle.

Remarque 11.1 *Pour $W \in X\ \mathbb{C}[[X]]$, la proposition 7.4 montre qu'on a*

$$Z = Exp\left(sW'; s\frac{W}{X}\right) = \frac{d}{dX}\left(X\ Exp\left(s\frac{W}{X}; s\frac{W}{X}\right)\right)$$

(la dernière égalité résulte de l'assertion (iii), proposition 6.5).

11.1 Une interprétation combinatoire de Z_0

Pour décrire l'interprétation combinatoire de Z_0, nous utilisons la série W pour associer une "énergie" à chaque élément, appelé état, d'un ensemble fini correspondant à l'espace de phase et représentant tous les états possibles d'un système "physique" discret (qui est purement mathématique dans notre cas). Nous empruntons seulement un peu de vocabulaire à la physique statistique sans entrer dans les détails. Plus précisément, le coefficient $[s^n]Z_0$ de la fonction Z_0 compte le nombre de certaines fonctions de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ avec une multiplicité déterminée par W. Ces fonctions sont en bijection avec des arbres enracinés à $n + 1$ sommets étiquetés de manière croissante à partir de la racine par l'ensemble $\{0, \ldots, n\}$.

Nous désignons par $\{n\}$ l'ensemble fini $\{1,\dots,n\}$ des n entiers naturels entre 1 et n et notons $\{n\}^{\{n\}}$ l'ensemble des n^n fonctions de $\{n\}$ dans $\{n\}$.

Considérons une suite $W_0, W_1, W_2, \dots \subset \mathbb{C}$ de série génératrice exponentielle $W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{X^n}{n!}$ et associons l'énergie

$$e_W(f) = \prod_{k=1}^{n} W_{\sharp(f^{-1}(k))} \in \mathbb{C}$$

à une fonction $f \in \{n\}^{\{n\}}$.

Remarque 11.2 *Un petit calcul, laissé au lecteur, montre l'égalité*

$$\sum_{f\in\{n\}^{\{n\}}} e_W(f) = [X^0]\frac{d^n}{dx^n}\,(W^n)\ .$$

Appelons une fonction $f \in \{n\}^{\{n\}}$ *admissible* si $f(k) \leq k$ pour tout $k \in \{n\}$. Notons $\mathcal{A}_n \subset \{n\}^{\{n\}}$ le sous-ensemble de toutes les fonctions admissibles. Il est facile de voir que $\mathcal{A}_n$ contient exactement $n!$ éléments. Plus précisément, l'application $f \in \mathcal{A}_n \longmapsto \sum_{k=1}^{n}(f(k)-1)k!$ est une bijection entre $\mathcal{A}_n$ et les $n!$ entiers $0,\dots,(n!-1)$.

Remarque 11.3 *La construction suivante donne une bijection classique entre l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des fonctions admissibles et les permutations de $\{n\}$: Pour $f \in \mathcal{A}_n \subset \{n\}^{\{n\}}$ une fonction admissible, posons $f_1 = f$ et définissons $f_2,\dots,f_n \in \{n\}^{\{n\}}$ récursivement comme suit: $f_k(i) = f_{k-1}(i)$ si $i \geq k$ ou si on a l'inégalité $f_{k-1}(i) < f_{k-1}(k)$ pour $i < k$. Dans les autres cas, c'est-à-dire pour $i < k$ tel que $f_{k-1}(i) \geq f_{k-1}(k)$, on pose $f_k(i) = f_{k-1}(i) + 1$.*

On montre facilement que f_n est une permutation de $\{n\}$ et que la restriction de l'application $f \longmapsto f_n$ à l'ensemble $\mathcal{A}_n \subset \{n\}^{\{n\}}$ des fonctions admissibles est injective.

L'ensemble $\mathcal{A}_n$ peut également être considéré comme l'ensemble des arbres enracinés à $n+1$ sommets numérotés de 0 à n de façon croissante depuis la racine (on a donc $v > w$ si le sommet numéroté v est un successeur du sommet numéroté w). En effet, associons à une fonction admissible $f \in \mathcal{A}_n$ l'arbre T_f dont la racine porte le numéro 0. Le prédécesseur immédiat d'un sommet $j > 0$ est le sommet $f(j) - 1$. Il est facile de voir que l'application $f \in \mathcal{A}_n \longmapsto T_f$ est bijective. De plus, elle préserve les "degrés": Soit $\mathcal{D}_f(k) = \{i \in \{n\} \mid \sharp(f^{-1}(i)) = k\} \subset \{n\}$ le sous-ensemble des éléments dans $\{n\}$ ayant k préimages sous l'application $f \in \mathcal{A}_n$. Alors un sommet numéroté $i < n$ de T_f est de degré $k \geq 1$ si et seulement si $i+1 \in \mathcal{D}_f(k)$ où le degré d'un sommet est défini comme le nombre de ses successeurs immédiats. En particulier, le nombre de sommets de degré $k \geq 1$ de T_f est donné par le nombre d'éléments $\sharp(\mathcal{D}_f(k))$ du sous-ensemble $\mathcal{D}_f(k) \subset \{n\}$. Le nombre de feuilles (sommets de degré 0) de T_f est donné par $1 + \sharp(\mathcal{D}_f(0))$ où $\mathcal{D}_f(0)$ est l'ensemble complémentaire $\{n\} \setminus f(\{n\})$ de l'image $f(\{n\}) \subset \{n\}$.

Remarque 11.4 *Le chapitre 1.3 dans [9] décrit une bijection entre les permutations de $\{n\}$ et les arbres enracinés avec $(n+1)$ sommets numérotés de 0 à n de manière croissante.*

Considérons maintenant la fonction $Z_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\{[X^0]G_n\}\frac{s^n}{n!}$ définie à partir de $G_0 = 1, \ldots, G_{n+1} = (WG_n)', \ldots$ pour une série génératrice exponentielle $W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{X^n}{n!}$ comme au début du chapitre.

Proposition 11.5 *On a l'égalité*

$$Z_0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \sum_{f\in\mathcal{A}_n} e_W(f) \ .$$

Exemples (i) Un petit calcul facile montre qu'on obtient $Z_0 = \frac{1}{1-s}$ pour $W = e^X$. Cet exemple trivial est équivalent à l'identité $\sharp(\mathcal{A}_n) = n!$.

(ii) Pour $W = \left(\frac{K}{1-K(X+\xi)}\right)^a$ avec $a \in \{1, 2, \ldots\}, K \in \mathbb{C}^*$ et $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{1/K\}$, le lemme 10.3 donne

$$Z_0 = \left(1 - s(a+1)\left(\frac{K}{1-K\xi}\right)^{a+1}\right)^{-a/(a+1)} \ .$$

(iii) Le choix de

$$W = \frac{(X+i)^2}{1-(X+i)^2} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{X^{4n}}{4^{n+1}}\left(2 + 2iX - X^2\right)$$

donne

$$Z = \frac{d}{dX}\left(\left(-\sqrt{1 - 2s(X+i) + (s^2-2)(X+i)^2 - 2s(X+i)^3 + (X+i)^4}\right.\right.$$
$$\left.\left. +1 - s(X+i) + (X+i)^2\right)\Big/(2(X+i))\right)$$

(voir remarque 11.1 et l'exemple (i) du chapitre 7.1). On obtient donc

$$Z_0 = 1 + \frac{is}{\sqrt{4-s^2}} = 1 + \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{s^{2n+1}}{16^n} \ .$$

Notons $\mathcal{S}(2n, k)$ l'ensemble fini formé par tous les arbres (non-planaires) enracinés de degré maximal ≤ 2 (chaque sommet possède donc au plus deux descendants directs) avec $2n$ sommets numérotés de manière croissante dans $\{0, \ldots, 2n-1\}$ et k feuilles (sommets terminaux).

Introduisons également l'ensemble fini $\mathcal{E}(2n+1, k)$ des arbres (non-planaires) enracinés n'ayant que des sommets de degrés pairs (le nombre de descendants directs de chaque sommet est pair) avec $2n+1$ sommets numérotés de manière croissante dans $\{0, \ldots, 2n\}$ et k sommets intérieurs (de degrés ≥ 2).

Nous allons donner plus loin une nouvelle preuve du résultat suivant qui se trouve dans [3] :

Théorème 11.6 *Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, les ensembles finies $\mathcal{S}(2n,k)$ et $\mathcal{E}(2n+1,k)$ contiennent le même nombre d'éléments.*

Preuve de la proposition 11.5 Notons $W(X_i) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{X_i^n}{n!} \in \mathbb{C}[[X_i]]$ la série formelle W en une variable X_i et posons $\tilde{G}_0 = 1, \ldots, \tilde{G}_{n+1} = \left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j \frac{\partial}{\partial X_j}\right)\left(W(X_{n+1})\tilde{G}_n\right), \ldots$. On obtient alors Z (respectivement Z_0) en évaluant la série formelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n \frac{s^n}{n!} \in \mathbb{C}[[s, X_1, X_2, \ldots, t_1, t_2, \ldots]]$$

en $t_j = 1$ et $X_j = X$ (respectivement en $t_j = 1$ et $X_j = 0$) pour tout $j \geq 1$. Les contributions à $[X_1^0 X_2^0 \cdots X_n^0]\tilde{G}_n$ sont de la forme

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n \in \{n\}} \alpha_{i_1 \ldots i_n} \prod_{j=1}^{n} (t_j^{i_j} W_{i_j})$$

où $\alpha_{i_1 \ldots i_n}$ est le nombre de fonctions admissibles $f \in \{n\}^{\{n\}}$ telles que $\sharp(f^{-1}(j)) = i_j$. En effet, l'exposant de t_j indique l'ordre de la dérivation par rapport à la variable X_j et une fonction $f : \{1, 2, \ldots\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots\}$ détermine pour chaque entier $j \leq n$ le sommand $t_{f(j)} \frac{\partial}{\partial X_{f(j)}}$ de l'opérateur différentiel $\sum_{j=1}^{\infty} t_j \frac{\partial}{\partial X_j}$ à appliquer à $(W(X_j)\tilde{G}_{j-1})$ pour obtenir une contribution à $\tilde{G}_j$. Comme seules les variables $X_1, \ldots, X_j$ apparaissent dans $W(X_j)\tilde{G}_{j-1}$, on peut se restreindre aux fonctions admissibles. □

11.2 Une équation différentielle pour Z_0

Considérons comme précédemment la série formelle $Z_0 \in \mathbb{C}[[s]]$ obtenue par l'évaluation en $X = 0$ de $Z = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{s^n}{n!}$ défini à partir de la suite récurrente $G_0, \ldots, G_{n+1} = (WG_n)', \ldots \subset \mathbb{C}[[X]]$ pour $W \in \mathbb{C}[[X]]$ une série formelle donnée.

Théorème 11.7 *Soit $Z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n s^n \in \mathbb{C}[[s]]$ une série formelle associée à $W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{X^n}{n!}$ comme ci-dessus. Alors la primitive $U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n \frac{s^{n+1}}{n+1} \in s\mathbb{C}[[s]]$ est une solution formelle de l'équation différentielle*

$$W_0 U' = W \circ (W_0 U)$$

avec la condition initiale $U(0) = 0$.

Remarque 11.8 *(i) Si $W_0 = 0$, l'équation différentielle du théorème 11.7 dégénère. Un calcul facile montre cependant qu'on a dans ce cas $Z_0 = e^{W_1 s}$.*

(ii) Le théorème 11.7 permet un calcul récursif des coefficients de U par "bootstrapping" : À partir d'une solution approchée à l'ordre n de U,

l'équation différentielle donne une solution approchée à l'ordre n de U' ce qui détermine U à l'ordre $n+1$.

(iii) En intégrant l'équation différentielle du théorème 11.7 on obtient la fonction réciproque

$$s = W_0 \int_0^U \frac{dv}{W \circ (W_0 v)} = \int_0^{W_0 U} \frac{dv}{W(v)} \in U\mathbb{C}[[U]]$$

de U.

(iv) On peut se débarasser du terme constant $W_0 \neq 1$ En considérant $\tilde{Z}_0$ associé à $\tilde{W} = \frac{1}{W_0} W = 1 + \ldots$ et en remarquant qu'on a $Z_0 = \tilde{Z}_0 \circ (W_0 s)$ pour Z_0 associé à W.

Preuve du théorème 11.7 Considérons d'abord une série formelle $W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{X^n}{n!}$ avec $W_0 \neq 0$ qui définit une fonction holomorphe dans un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant 0 et une racine ξ de W. La fonction $w(x) = W(x+\zeta)$ est alors holomorphe dans un ouvert connexe $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ contenant 0 et $-\xi$. Comme w admet l'origine $0 \in \mathbb{C}$ comme racine, la série $\frac{w}{x} \in \mathbb{C}[[x]]$ définit également une fonction holomorphe dans $\mathcal{O}$. Le théorème 10.1 montre que les fonctions $\mathrm{Exp}(sw'; s\frac{w}{x})$ et $\mathrm{Exp}(s\frac{w}{x}; s\frac{w}{x})$ sont holomorphes en x et s pour (x,s) appartenant à un ouvert contenant $\mathcal{O} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^2$.

Considérons maintenant les fonctions holomorphes

$$y_s = \mathrm{Exp}\left(sw'; s\frac{w}{x}\right)|_{x=-\xi},\ z_s = \mathrm{Exp}\left(s\frac{w}{x}; s\frac{w}{x}\right)|_{x=-\xi}$$

de s, obtenues en évaluant $\mathrm{Exp}(sw'; s\frac{w}{x})$ et $\mathrm{Exp}(s\frac{w}{x}; s\frac{w}{x})$ en $x = -\xi$. Comme $w' = \left(x\frac{w}{x}\right)'$, l'assertion (iii) de la proposition 6.5 montre l'identité

$$y_s = \left(\frac{d}{dx}(x\mathrm{Exp}(s\frac{w}{x}; s\frac{w}{x}))\right)|_{x=-\xi}\ .$$

L'équation différentielle de l'assertion (ii), proposition 7.1, devient donc

$$\begin{array}{rcl} y_s' & = & y_s\ w' \circ (-\xi z_s) \\ z_s' & = & -\frac{w(-\xi)}{\xi} y_s\ . \end{array}$$

En éliminant $y_s = -\frac{\xi}{w(-\xi)} z_s' = -\frac{\xi}{W_0} z_s'$, nous obtenons

$$z_s'' = z_s'\ w' \circ (-\xi z_s) = z_s'\ W' \circ (\xi - \xi z_s)$$

avec les conditions initiales $z_0 = 1$ et $z_0' = -\frac{W_0}{\xi} y_0 = -\frac{W_0}{\xi}$. La primitive $U = \frac{1}{W_0}(\xi - \xi z_s)$ de y_s satisfait alors l'équation différentielle $U'' = U'\ \{W' \circ (W_0 U)\} = \frac{1}{W_0}(W \circ (W_0 U))'$ du théorème pour les conditions initiales $U(0) = 0$ et $U'(0) = 1$. Une intégration donne alors $U' = \frac{1}{W_0} W \circ (W_0 U)$.

Pour démontrer le cas général, il suffit de prouver la congruence $U' = W \circ (W_0 U) \pmod{s^N}$ pour $N \in \mathbb{N}$ un entier naturel arbitraire. Fixons un tel entier $N \in \mathbb{N}$ et considérons le polynôme $\tilde{W} = X^{N+1} + \sum_{n=0}^{N} W_n \frac{X^n}{n!}$. Un petit calcul montre que la série $\tilde{Z}_0$ associée à $\tilde{W}$ coincide avec la série Z_0 associée à W jusqu'à l'ordre N. Comme $\tilde{W}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et possède au moins une racine, la preuve précédente marche pour $\tilde{U} = \int \tilde{Z}_0$. Le résultat suit maintenant des observations $W \equiv \tilde{W} \pmod{X^N}$ et $U = \int Z_0 \equiv \tilde{U} = \int \tilde{Z}_0 \pmod{s^{N+1}}$ avec $U, \tilde{U} \in s\mathbb{C}[[s]]$. □

11.3 Exemples et preuve du théorème 11.6

11.3.1 Exemple

Pour $W = \frac{1}{P}$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(0) = 1/W_0 \neq 0$, on a

$$\int_0^{W_0 U} P(v)dv = s \ .$$

En particulier, U et $Z_0 = U'$ sont algébriques. Cette construction est évidemment reliée au chapitre 7.1. On peut ainsi également considérer une fraction rationelle $\beta \in \mathfrak{m}$ satisfaisant la condition du corollaire 7.5 (qui est équivalente au fait que la fraction rationelle $\frac{1}{x\beta}$ admet une primitve rationelle). Le choix d'un nombre complexe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\beta(\xi) \in \mathbb{C}^*$ donne alors une fonction algébrique Z_0 en considérant la $W(X) = \frac{\beta(X-\xi)}{X-\xi}$.

Similairement, pour $H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ une série formelle telle que $H_0 = H(0), H_1 = H'(0) \neq 0$, on peut considérer $W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{X^n}{n!} = \frac{H}{H'}$ avec $W(0) = W_0 \neq 0$ et on obtient $H(W_0 U) = H(0)e^s$.

11.3.2 Exemple

Pour le polynôme $W = 1 + tX + \frac{X^2}{2}$ on trouve l'équation différentielle

$$U' = 1 + tU + \frac{U^2}{2}$$

avec la condition initiale $U(0) = 0$ admettant la solution

$$U = \tan\left(\frac{s}{2}\sqrt{2-t^2} + \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\right)\right)\sqrt{2-t^2} - t$$

avec dérivée

$$Z_0 = \frac{2-t^2}{2}\left(1 + \tan\left(\frac{s}{2}\sqrt{2-t^2} + \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\right)\right)^2\right) \ .$$

La spécialisation $t = 1$ donne

$$Z_0 = \frac{1 + (\tan(s/2 + \pi/4))^2}{2} = \frac{1 + \sin(s)}{\cos(s)^2} = 1 + s + 2\frac{s^2}{2!} + 5\frac{s^3}{3!} + 16\frac{s^4}{4!} + \dots$$

et correspond à la série génératrice exponentielle de la suite des nombres

$$1, 1, 2, 5, 16, 61, \ldots ,$$

aussi appelés nombres d'Euler, voir la suite A111 dans [2] ou le chapitre 3.16 dans [9].

La spécialisation $t = 0$ donne

$$Z_0 = 1+(\tan(s/\sqrt{2}))^2 = -2\left(\log\circ\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)'' = 1+\frac{s^2}{2!}+4\frac{s^4}{4!}+34\frac{s^6}{6!}+\ldots$$

et correspond à la série génératrice exponentielle paire de la suite entière

$$1, 1, 4, 34, 496, \ldots$$

reliée aux nombres de Bernoulli, voir la suite A2105 dans [2].

Pour $W = 1+tX+\frac{X^2}{2}$ avec t non évalué, le coefficient $A_n = [s^n]Z_0 \in \mathbb{N}[t]$ est un polynôme de degré n en t, appelé le $n-$ième polynôme d'André, voir la suite A94503 dans [2]. Le coefficient $[t^k]A_n$ donne le nombre de fonctions admissibles dans $\mathcal{A}_n$ telles que chaque élément $j \in \{n\}$ a au plus 2 préimages et exactement k éléments de $\{n\}$ ont une préimage unique. Les polynômes d'André sont faciles à calculer en utilisant le résultat suivant.

Lemme 11.9 *La suite $A_0 = 1, A_1 = t, A_2 = 1 + t^2, A_3 = 4t + t^3, \ldots$ des polynômes d'André satisfait la relation de récurrence*

$$A_{n+1} = (1 - t^2/2)A'_n + t\frac{n+2}{2}A_n \ .$$

Preuve Soit $f \in \mathcal{A}_{n+1}$ une fonction admissible donnant une contribution de 1 à $[t^k]A_{n+1}$. Considérons la restriction g de f à $\{n\}$. Comme $f \in \{n+1\}^{\{n+1\}}$ est admissible, $g \in \{n\}^{\{n\}}$ l'est aussi et fournit une contribution de 1 à $[t^{k+1}]A_n$ si la préimage de $f(n+1)$ est double ou une contribution de 1 à $[t^{k-1}]A_n$ si la préimage de $f(n+1)$ est simple. Dans le premier cas, il y a $(k+1)$ possibilités pour choisir $f(n+1)$. Dans le deuxième cas, g a une préimage double pour a éléments dans $\{n\}$ avec $n = 2a + (k-1)$ ce qui donne $a = \frac{n+1-k}{2}$ et le nombre de choix possibles pour $f(n+1)$ est donné par $n + 1 - (k-1) - a = \frac{n-k+3}{2} = \frac{n+2-(k-1)}{2}$. On a donc la récurrence $A_{n+1} = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) A'_n + t\frac{n+2}{2}A_n$. □

11.3.3 Exemple

En posant $W = 1 - t + t\,\cosh(X) = 1 + t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^{2n}}{(2n)!}$ on obtient l'équation différentielle

$$U' = 1 - t + t\,\cos(U)$$

avec la condition initiale $U(0) = 1$ satisfaite par la fonction

$$U = \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\left(\tan\left(\frac{s}{2}\sqrt{2t-1}+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2t-1}}\right)\right)\right)^2\right)\right.$$
$$\left.-\log\left(1+\left(\tan\left(-\frac{s}{2}\sqrt{2t-1}+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2t-1}}\right)\right)\right)^2\right)\right) .$$

La dérivée $Z_0 = U'$ est donc donnée par

$$Z_0 = \frac{\sqrt{2t-1}}{2}\left(\tan\left(\frac{s}{2}\sqrt{2t-1}+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2t-1}}\right)\right)\right.$$
$$\left.+\tan\left(-\frac{s}{2}\sqrt{2t-1}+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2t-1}}\right)\right)\right) .$$

Preuve du théorème 11.6 Il suffit de vérifier que la substitution $s \longmapsto st, t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ dans la dérivée Z_0' de l'exemple 11.3.3 coincide (à un facteur t^2 près) avec la partie impaire en s de la fonction Z_0 apparaissant dans l'exemple 11.3.2. Nous laissons les détails calculatoires au lecteur. □

12 Matrices de Riordan

L. Shapiro a introduit le groupe matriciel $\rho(\mathcal{I})$ sous le nom de "groupe de Riordan", voir par exemple [7]. Encore auparavant, certains éléments de ce groupe ont été étudié par D.G. Rogers sous le nom de "renewal arrays", voir [6]. Ce chapitre est un bref résumé des travaux entrepris par différents auteurs dans le but d'élucider certaines structures combinatoires à l'aide de matrices de Riordan.

Commençons par citer le résultat suivant, dû à D.G. Rogers, utile pour caractériser les matrices dans $\rho(\mathcal{I})$.

Théorème 12.1 *(D.G. Rogers, voir [6]?) Soit M une matrice triangulaire inférieure infinie de coefficients $M_{i,j}, 0 \leq i, j$. Alors $M \in \rho(\mathcal{I})$ si et seulement si il existe une suite $a_0, a_1, \ldots$ de nombres complexes avec $a_0 \neq 0$ telle que $M_{n+1,k+1} = \sum_{j=0}^{n-k} \alpha_j M_{n,k+j}$.*

Remarque 12.2 *Pour $\rho(B,\beta) \in \rho(\mathcal{I})$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{\beta^{\langle -1\rangle}}$ pour la série génératrice $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de la suite $A = (a_0, a_1, \ldots)$ (appelée $A-$suite de la matrice de Riordan associée à $(B, \frac{\beta}{x})$ dans la littérature sur les matrices de Riordan) intervenant dans le théorème 12.1.*

Mentionnons également l'existence d'une généralisation de ce théorème, voir [5].

Preuve du théorème 12.1 L'identité facile

$$\left(B\left(\frac{\beta}{x}\right)^n, \beta\right)\left(\frac{x}{\beta^{\langle -1\rangle}}, x\right) = \left(B\left(\frac{\beta}{x}\right)^{n+1}, \alpha\right)$$

montre le résultat pour un élément $\rho(B,\beta) \in \rho(\mathcal{I})$ en considérant la suite $a_0, a_1, \ldots$ des coefficients de $\frac{x}{\beta^{\langle -1\rangle}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

D'autre part, soit $B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ la série géneratrice de la première colonne d'une matrice M satisfaisant l'hypothèse du théorème 12.1 pour une suite $a_0, a_1, \ldots$. Considérons la matrice $\tilde{M} = \rho(B,\beta)$ pour $\beta = \left(\frac{x}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}\right)^{\langle -1\rangle}$. La première colonne des matrices M et $\tilde{M}$ coincide alors et les autres colonnes de M et $\tilde{M}$ sont définies récursivement de la même manière. On a donc $M = \tilde{M}$. □

La formule de récursion pour les coefficients donnée par le théorème 12.1 peut s'interpréter en termes de chemins sur le réseau $\mathbb{Z}^2$ comme suit : Considérons les chemins reliant l'origine $(0,0)$ au point (n,k) sans quitter le cône $\{k \geq 0\} \cap \{n \geq k\}$ et utilisant des pas colorés par a_j couleurs de la forme $(1, 1-j)$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots$. Le nombre $m_{n,k}$ de tels chemins satisfait par construction l'équation

$$m_{n+1,k+1} = \sum_{j=0}^{n-k} a_j m_{n,k+j} \ .$$

Le théorème 12.1 montre donc pour $a_0 \neq 0$ l'appartenance à $\rho(\mathcal{I})$ de la matrice triangulaire inférieure avec coefficients $m_{i,j},\ 0 \leq i, j$. Plus précisément, cette matrice est donnée par $\rho\left(\frac{\beta}{x}, \beta\right)$ avec $\beta = (x/\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^{\langle -1\rangle}$.

Exemples Pour $a_0 a_2 \neq 0$ et $a_3 = a_4 = \ldots = 0$, on trouve

$$\beta = \frac{(1 - a_1 x) - \sqrt{(1 - a_1 x)^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_2 x} \ .$$

Des choix convenables pour a_0, a_1, a_2 permettent de retrouver des triangles apparaissant dans la litérature de la combinatoire énumérative.

Mentionnons également l'élément $\rho(1, e^x - 1) \in \mathcal{I}$ qui est relié aux nombres de Stirling de deuxième espèce, voir par exemple le chapitre 5.8 de [8] pour les détails.

Pour terminer ce chapitre nous relions brièvement ce qui précède à certains déterminants.

Associons à une suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$ la suite $d_0 = 1, d_1 = a_0, \ldots \subset \mathbb{C}[x]$ des déterminants $d_n = \det(T_n)$ où T_n est la matrice de Toeplitz

$$T_n = \begin{pmatrix} a_0 & -x & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & -x & & \vdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & & & \ddots & -x \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

avec coefficients $T_{i,j} = a_{i-j}$ si $0 \leq j \leq i < n$, $T_{i,i+1} = -x$ et $T_{i,j} = 0$ sinon. Un calcul facile donne la récurrence

$$d_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} a_j d_{n-j} x^j \ .$$

La suite $d_0, d_1, \ldots$ est d'ailleurs également la suite des déterminants des matrices $\tilde{T}_n$ pour

$$\tilde{T}_n = \begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 x & a_0 & -1 & & \vdots \\ a_2 x^2 & a_1 x & a_0 & & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ a_{n-1} x^{n-1} & a_{n-2} x^{n-2} & \ldots & a_1 x & a_0 \end{pmatrix} \ .$$

Si $a_0 \neq 0$, le Théorème 12.1 montre que la matrices triangulaire infinie avec coefficients $M_{i,j} = [x^{i-j}] d_{i+1},\ 0 \leq i, j$ est de la forme $\rho\left(\frac{\beta}{x}, \beta\right) \in \rho(\mathcal{I})$ avec $\beta = \left(\frac{x}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}\right)^{\langle -1 \rangle}$.

13 L'algèbre $\mathcal{P}$ des matrices triangulaires infinies polynomiales

Ce chapitre décrit une algèbre contenant quelques sous-algèbres et groupes intéressants. En particulier, elle contient le groupe d'interpolation $\mathcal{I}$ considéré dans les chapitres précédents.

Définition On dira qu'une matrice triangulaire inférieure infinie M est *polynomiale* s'il existe une suite de polynômes $p_0, p_1, \ldots \in \mathbb{C}[u]$ telle que $M_{i,j} = p_{i-j}(j)$ pour tout coefficient non-nul $M_{i,j}, 0 \leq j \leq i$ de M.

Désignons par $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures infinies qui sont polynomiales. Notons $\mathcal{SG} \subset \mathcal{P}$ le sous-ensemble des matrices unipotentes (avec coefficients 1 sur la diagonale) dans $\mathcal{P}$ et notons $\mathfrak{sg} \subset \mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures strictes de $\mathcal{P}$.

Étant donnée une matrice M$\in \mathcal{P}$ avec coefficients $M_{i,j} = p_{i-j}(j)$, notons $\tau_\lambda(M) \in \mathcal{P}$ la matrice avec coefficients $(\tau_\lambda(M))_{i,j} = p_{i-j}(j + \lambda)$.

Théorème 13.1 *(i) L'ensemble $\mathcal{P}$ est une algèbre. L'ensemble $\mathcal{SG}$ est un groupe de Lie de dimension infinie d'algèbre de Lie $\mathfrak{sg}$.*

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application linéaire $\tau_\lambda : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ définie par $M \longmapsto \tau_\lambda(M)$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{P}$ et de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sg}$.

Remarque 13.2 *(i) La preuve du théorème 13.1 montre que l'espace vectoriel $\mathfrak{g} = \mathcal{P}$ est également une algèbre de Lie. Le groupe de Lie associé*

n'est cependant pas dans $\mathcal{P}$ car il contient également les matrices diagonales avec coefficients diagonaux $e^{p_0(0)}, e^{p_0(1)}, e^{p_0(2)}, \ldots$ pour $p_0 \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme. On pourrait cependant légèrement agrandir l'algèbre de Lie $\mathfrak{sg}$ en remarquant que les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{P}$ sont exactement les matrices de $\mathcal{P}$ ayant une diagonale constante non-nulle. L'algèbre de Lie associée s'obtient en rajoutant les multiples de l'identité à l'espace vectoriel $\mathfrak{sg}$.

(ii) L'automorphisme τ_λ est la généralisation à $\mathcal{P}$ de l'automorphisme de groupe $\varphi_{0,\lambda,0}$ de $\mathcal{SI}$ considéré dans la proposition 2.1. En particulier, τ_1 agit en effaçant la première ligne et colonne d'une matrice $M \in \mathcal{P}$.

L'ingrédient crucial pour prouver le théorème 13.1 est le résultat suivant.

Lemme 13.3 *(i) Soient $a = (a_0, a_1, \ldots,), b = (b_0, b_1, \ldots) \in \mathbb{C}[u]^{\mathbb{N}}$ deux suites de polynômes. Alors il existe une suite de polynômes $c = (c_0, c_1, \ldots)$ telle que*

$$M(a)M(b) = M(c) \ .$$

De plus, on a $deg(c_k) \leq sup_{0\leq h\leq k}(deg(a_h) + deg(b_{k-h}))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Soient $a = (a_0, a_1, \ldots,), b = (b_0, b_1, \ldots) \in \mathbb{C}[u]^{\mathbb{N}}$ deux suites de polynômes. Alors les degrés $deg(\tilde{c}_k)$ de la suite $\tilde{c} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots)$ associée au commutateur

$$M(\tilde{c}) = [M(a), M(b)] = M(a)M(b) - M(b)M(a)$$

vérifient les inégalités $deg(\tilde{c}_k) < sup_{0\leq h\leq k}(deg(a_h) + deg(b_{k-h}))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Preuve du lemme 13.3 Comme le coefficient de $(M(a)M(b))_{l+k,l}$ ne dépend que de $(M(a))_{i,j}, (M(b))_{i,j}$ avec $i - j \leq k$, on peut supposer que les polynômes $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ sont tous de degré au plus

$$\max(\deg(a_0), \ldots, \deg(a_k), \deg(b_0), \ldots, \deg(b_k)) \ .$$

Par linéarité, il suffit de considérer deux matrices A, B avec coefficients $A_{i,j} = j^s\alpha_{i-j}$ et $B_{i,j} = j^t\beta_{i-j}$ pour des suites numériques $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, étendues à des indices négatives en posant $\alpha_n = \beta_n = 0$ pour tout entier $n < 0$. Dans la suite, on supposera également $i \geq j$.

La preuve de l'assertion (i) est par récurrence sur l'exposant s apparaissant dans les coefficients $A_{i,j} = j^s\alpha_{i-j}$ de la matrice A. La preuve pour $s = 0$ résulte de la définition

$$(AB)_{i,j} = \sum_k \alpha_{i-k}j^t\beta_{k-j} = j^t \sum_k \alpha_{i-k}\beta_{k-j}$$

(toutes les sommes sont finies).

Considérons maintenant

$$(AB)_{i,j} = j^t \sum_k k^s \alpha_{i-k}\beta_{k-j} = C_{i,j} - D_{i,j}$$

avec

$$C_{i,j} = j^t \sum_k (k^s - j^s)\, \alpha_{i-k}\beta_{k-j}$$

et

$$D_{i,j} = j^{s+t} \sum_k \alpha_{i-k}\beta_{k-j} \ .$$

Les coefficients $D_{i,j}$ sont de la forme voulue. La factorisation $(k^s - j^s) = (k-j)\sum_{h=0}^{s-1} k^h j^{s-1-h}$ montre que l'hypothèse de récurrence s'applique à

$$C_{i,j} = \sum_{h=0}^{s-1} j^{s+t-1-h} \sum_k k^h \alpha_{i-k}\,((k-j)\beta_{k-j})$$

ce qui prouve l'assertion (i).

Pour démontrer l'assertion (ii), il suffit de remarquer que le terme de plus haut degré $s+t$ dans la preuve de l'assertion (i) correspond à

$$\sum_k \alpha_{i-k}\beta_{k-j} = \sum_k \beta_{i-k}\alpha_{k-j} \ .$$

Il se simplifie donc dans le crochet de Lie $[M(a), M(b)] = M(a)M(b) - M(b)M(a)$. □

Remarque 13.4 *(i) On peut aussi prouver le lemme 13.3 de la manière suivante : Pour $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ une série formelle, notons P_α la matrice triangulaire inférieure de coefficients $(P_\alpha)_{i,j} = \alpha_{i-j}$ (en utilisant la convention $\alpha_n = 0$ pour $n < 0$) et notons D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $D_{i,i} = i$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$.*

La matrice A avec coefficients $A_{i,j} = j^s \alpha_{i-j}$ considérée dans la preuve du lemme 13.3 est alors donnée par $A = P_\alpha D^s$ et le lemme 13.3 est une conséquence facile du calcul

$$([P_\alpha, D])_{i,j} = \alpha_{i-j} j - i\alpha_{i-j} = -(i-j)\alpha_{i-j}$$

qui montre l'identité

$$[P_\alpha, D] = -P_{x\alpha'}$$

avec $x\alpha' = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^n$ pour le crochet de Lie $[P_\alpha, D] = P_\alpha D - DP_\alpha$ de P_α avec D.

(ii) La partie (i) de la remarque montre que toute matrice $M \in \mathcal{P}$ est de la forme

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\alpha(n)} D^n$$

où les séries formelles $\alpha(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)_j x^j \in \mathbb{C}[[x]]$ *vérifient la condition suivante : pour tout entier naturel* $k \in \mathbb{N}$ *fixé, il existe un entier naturel* $N_k \in \mathbb{N}$ *tel que* $\alpha(n)_k = 0$ *pour tout* $n > N_k$*. Il y a alors au plus* N_k *contributions non-nulles à* $M_{k+j,j} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(n)_k j^n$ *pour* k *fixé et* N_k *majore le degré du polynôme* p_k *définie par les coefficients* $M_{k+i,i} = p_k(i)$*. Réciproquement, toute expression* $\sum_{n=0}^{\infty} P_{\alpha(n)} D^n$ *avec* $\alpha(0), \alpha(1), \ldots \in \mathbb{C}[[x]]$ *des séries formelles comme ci-dessus, définit un élément de* $\mathcal{P}$*.*

Preuve du théorème 13.1 Le lemme 13.3 montre que $\mathcal{P}$ est une algèbre. Pour vérifier que $\mathcal{SG}$ est une groupe de Lie d'algèbre $\mathfrak{sg}$, il suffit de remarquer que le logarithme matriciel

$$\log(A) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(A - \mathrm{id})^n}{n}$$

induit une bijection de $\mathcal{SG}$ sur $\mathfrak{sg}$, dont l'inverse est l'exponentielle matricielle

$$\exp(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \ .$$

Ces propriétés résultent de l'observation que le logarithme de $A \in \mathcal{SG}$ et l'exponentielle de $B \in \mathfrak{sg}$ ci-dessus se réduisent à des sommes finies après restriction aux sous-matrices finies données par les n premières lignes et colonnes.

L'assertion (ii) est évidente pour $\lambda \in \mathbb{N}$ car τ_λ efface alors les λ premières lignes et colonnes d'un élément $M \in \mathcal{P}$. Comme les polynômes sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$, le cas général s'ensuit. □

Remarque 13.5 *En considérant des matrices indexées par* $\mathbb{Z}$*, on peut définir une algèbre (de Lie) à partir de suites biinfinies de la forme* $p = (\ldots, 0, 0, p_N, p_{N+1}, \ldots)$ *avec* $N \in \mathbb{Z}$ *et* $p_i \in \mathbb{C}[u]$*, voir la remarque 4.2.*

On peut même affaiblir cette hypothèse en imposant des conditions de décroissance en $n \longrightarrow \pm\infty$ *pour les polynômes* p_n*.*

On peut également définir des sous-algèbres (de Lie) dans $\mathcal{P}$ *en imposant des conditions supplémentaires aux suites de polynômes* $p = (p_0, p_1, \ldots) \in \mathbb{C}[u]^{\mathbb{N}}$ *admissibles : on peut par exemple se restreindre aux suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non-nuls. Un autre type de restrictions, donné par des conditions sur la suite* $deg(p_0), deg(p_1), \ldots$ *sera considéré plus tard.*

Toutes les sous-algèbres (de Lie) de $\mathcal{P}$ *sont filtrées sur* $\mathbb{N}$*. En effet, notons* $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ *les sous-espace vectoriel formé de toutes les matrices* $M(p)$ *avec* $p = (p_0 = \ldots = p_{n-1} = 0, p_n, p_{n+1} \ldots) \in \mathbb{C}[u]^{\mathbb{N}}$*. On a alors* $\mathcal{P}_n\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}_{n+m}$*. En particulier,* $\mathcal{P}_n$ *est un idéal bilatère de* $\mathcal{P}$*.*

13.1 Sous-algèbres de degré $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{P}$

Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Nous dirons que $\mathcal{B}$ est *additivement fermé* si pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ il existe $\gamma \in \mathcal{B}$ satisfaisant

$$\sup_{0 \leq h \leq k}(\alpha(h) + \beta(k-h)) \leq \gamma(k)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. On dira qu'une suite de polynômes $p = (p_0(u), p_1(u), \ldots) \in \mathbb{C}[u]^{\mathbb{N}}$ est *de degré (au plus)* $\mathcal{B}$ s'il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{B}$ telle que

$$\deg(p_k) \leq \alpha(k)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un ensemble de fonctions $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Pour $\alpha \in \mathcal{B}$, notons $\underline{\alpha}$ la fonction définie par $\underline{\alpha}(0) = 0$ et $\underline{\alpha}(n) = \alpha(n)$ pour $n \geq 1$. Notons $\underline{\mathcal{B}}$ l'ensemble des fonctions $\underline{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathcal{B}$. Il est évident que $\underline{\mathcal{B}}$ est additivement fermé si $\mathcal{B}$ l'est.

On munira les ensembles de fonctions $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ additivement fermés d'un ordre partiel en posant $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ si toute fonction $\alpha \in \mathcal{B}_1$ admet une fonction majorante $\beta \in \mathcal{B}_2$. En d'autres termes, pour tout $\alpha \in \mathcal{B}_1$, il existe une fonction $\beta \in \mathcal{B}_2$ telle que $\alpha(n) \leq \beta(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition du degré, toute suite $p \in \mathbb{C}[u]^{\mathbb{N}}$ de degré $\mathcal{B}_1$ est également de degré $\mathcal{B}_2$ si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sont deux ensembles de fonctions additivement fermés tels que $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$.

Exemples L'ensemble de fonctions $\mathcal{B} = \{0\}$ réduit à la fonction identiquement nulle est additivement fermé.

L'ensemble $\mathcal{B}$ formé de toutes les fonctions constantes $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est additivement fermé.

Pour tout entier $a \geq 0$ et pour tout entier $b \geq 1$, l'ensemble constitué par la seule fonction $n \longmapsto a\, n^b$ est additivement fermé.

Pour $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$ des ensembles additivement fermés, l'ensemble des fonctions $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ avec $\alpha_i \in \mathcal{B}_i$ est additivement fermés (dans le cas où l'ensemble $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$ est infini, on peut se contenter de sommes sur des sous-ensembles finis).

Pour $p = (p_0, p_1, \ldots) \in \mathbb{C}[u]^{\mathbb{N}}$ une suite de polynômes, notons $p' = (p'_0, p'_1, \ldots)$ la suite des dérivées. Pour $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un ensemble additivement fermé, notons $\mathcal{P}^{\mathcal{B}}$ l'espace vectoriel contenant toutes les matrices $M(p)$ associées à des suites de polynômes $p \in \mathbb{C}[u]^{\mathbb{N}}$ de degré $\mathcal{B}$. Considérons également l'espace vectoriel $\mathfrak{sg}^{\mathcal{B}} \subset \mathfrak{sg}$ formé des matrices $M(p)$ associées aux suites $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$ avec $p' = (p'_0 = 0, p'_1, p'_2, \ldots)$ de degré $\mathcal{B}$.

Proposition 13.6 *(i) Pour $\mathcal{B}$ un ensemble de fonction $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ additivement fermé, l'ensemble des matrices $\mathcal{P}^{\mathcal{B}} \subset \mathcal{P}$ est une sous-algèbre et $\mathfrak{sg}^{\mathcal{B}} \subset \mathfrak{sg}$ est une sous-algèbre de Lie.*

(ii) Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ additivement fermé. Supposons que toute fonction $\alpha \in \mathcal{B}$ admet un majorant $\beta \in \mathcal{B}$ avec $\{\beta\}$ additivement fermé. Alors l'exponentielle matricielle induit une bijection entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{sg} \cap \mathcal{P}^{\mathcal{B}}$ et le groupe des matrices unipotentes $\mathcal{SG} \cap \mathcal{P}^{\mathcal{B}}$.

La preuve est une conséquence facile du Lemme 13.3. Elle est laissée au lecteur.

Remarque 13.7 *La relation d'ordre sur les sous-ensembles additivement fermés de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ induit des inclusions au niveau des algèbres (de Lie).*

Pour $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ additivement fermé, l'ensemble $\mathcal{P}^{\mathcal{B}}$ est également une algèbre de Lie (pour le crochet usuel $[X,Y] = XY - YX$) et son algèbre de Lie dérivée $[\mathcal{P}^{\mathcal{B}}, \mathcal{P}^{\mathcal{B}}]$ est une sous-algèbre (parfois stricte) de $\mathfrak{sg}^{\mathcal{B}}$.

Exemples L'algèbre $\mathcal{M}^{\{0\}}$ associée à l'ensemble des fonctions additivement fermé réduit à la fonction identiquement nulle est l'ensemble

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_0 & & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & & \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}, \alpha_0, \alpha_1, \ldots \in \mathbb{C}$$

des *matrices de Toeplitz* triangulaires inférieures. Une telle matrice est complètement décrite par la suite $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des coefficients de sa première colonne $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)^t$ et l'application $T(\alpha_0, \alpha_1, \ldots) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ qui associe à une telle matrice de Toeplitz la série génératrice $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ de sa première colonne est un isomorphisme d'algèbre (pour la structure d'algèbre commutative donnée par le produit des séries formelles sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[[x]]$).

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sg}^{\{0\}}$ associée à $\mathcal{B} = \{0\}$ est l'espace vectoriel de toutes les matrices triangulaires inférieures strictes associées à des suites de polynômes affines. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sg}^{\{0\}}$ est donc l'algèbre de Lie $\mathfrak{si}$ du groupe d'interpolation spécial $\mathcal{SI}$ étudié dans les chapitres précédents.

Plus généralement, pour un entier $\lambda \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{\lambda\ \mathrm{id}\}$ réduit à la fonction linéaire $n \longmapsto \lambda n$ est additivement fermé. On peut donc considérer l'algèbre $\mathcal{P}^{\{\lambda\ \mathrm{id}\}}$. Cette algèbre contient l'idéal $\mathcal{S}$ constitué de toutes les matrices de la forme $M(p)$ avec $p = (p_0 = 0, p_1, p_2, \ldots) \in \mathbb{C}[u]$ où $\deg(p_j) < \lambda j$. La preuve du lemme 13.3 montre que la structure d'algèbre du quotient $\mathcal{M}^{\{\lambda\ \mathrm{id}\}}/\mathcal{S}$ ne dépend pas de λ. L'algèbre quotient $\mathcal{M}^{\{\lambda\ \mathrm{id}\}}/\mathcal{S}$ s'identifie donc à l'algèbre $\mathcal{M}^{\{0\}}$ (dans laquelle l'idéal $\mathcal{S}$ se réduit à $\{0\}$) des matrices de Toeplitz considérée auparavant. Remarquons que l'exponentielle matricielle induit une surjection entre $\mathcal{M}^{\{\lambda\ \mathrm{id}\}}$ et le groupe des éléments inversibles dans $\mathcal{M}^{\{\lambda\ \mathrm{id}\}}$ formé de toutes les matrices avec diagonale non-nulle dans $\mathcal{M}^{\{\lambda \mathrm{id}\}}$. Cette surjection se restreint en une bijection entre matrices triangulaires inférieures strictes dans $\mathcal{M}^{\{\lambda\ \mathrm{id}\}}$ et le sous-groupe $\mathcal{M}^{\{\lambda\ \mathrm{id}\}} \cap \mathcal{SG}$ formés des matrices unipotentes inversibles dans $\mathcal{M}^{\{\lambda\ \mathrm{id}\}}$. La bijection inverse est évidemment donnée par le logarithme matricielle (qui converge

toujours coefficient par coefficient car $G \in \mathcal{SG}$ est une matrice triangulaire inférieure unipotente).

Le groupe spécial d'interpolation $\mathcal{SI} = \{\exp(A) \mid A \in \mathfrak{si}\}$, est un sous-groupe de l'algèbre $\mathcal{M}^{\{\mathrm{id}\}}$ associée à $\lambda = 1$. Ajoutons que l'algèbre $\mathcal{M}^{\{2\ \mathrm{id}\}}$ (qui contient évidemment $\mathcal{M}^{\{\mathrm{id}\}}$ comme sous-algèbre) contient également des éléments intéressants comme par exemple une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients sont donnés par les nombres de Stirling (de première ou deuxième espèce).

References

[1] N.T. Cameron, A. Nkwanta, *On Some (Pseudo) Involutions in the Riordan Group*, J. of Int. Seq., Vol 8 (2005), Article 05.3.7.

[2] N.J.A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, http://www.research.att.com/ njas/sequences/index.html

[3] A.G. Kuznetsov, I.M. Pak, A.E. Postnikov, *Increasing trees and alternating permutations*, Russ. Math. Surv. **49**, No.6, 79-114 (1994); traduit de : Usp. Mat. Nauk **49**, No.6, 79-110 (1994).

[4] G. Labelle, *Sur l'inversion et l'iteration continue des series formelles*, Europ. J. Combin., **1** (1980), 113–138.

[5] D. Merlini, D.G. Rogers, R. Sprignoli, M.C. Verri, *On some alternative characterizations of Riordan arrays*, Can. J.Math. **49**, No. 2, 301-320 (1997).

[6] D. G. Rogers, *Pascal triangles, Catalan numbers and renewal arrays*, Discr. Maths. **22** (1978), 301-310.

[7] L. W. Shapiro, S. Getu, W. J. Woan, L. C. Woodson, *The Riordan group*, Discrete Appl. Math. **34** (1991), no. 1-3, 229-239.

[8] R. Sprugnoli, An Introduction to Mathematical Methods in Combinatorics, preprint.

[9] R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol. 1, Cambridge University Press, 1997.

Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, UMR 5582 (UJF-CNRS), 100, rue des Mathématiques, BP 74, 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex, France

Adresse courriel: Roland.Bacher@ujf-grenoble.fr