

LABORATOIRE D'INFORMATIQUE, DE
ROBOTIQUE ET DE
MICROÉLECTRONIQUE DE
MONTPELLIER

Unité Mixte CNRS - Université Montpellier II
5506

RAPPORT DE RECHERCHE

Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance (CRAS) - II

Olivier Cogis
Sylvain Durand
Jérôme Palaysi

Benoît Darties
Jean-Claude König

juillet 2005

R.R.LIRMM 05052

Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance (CRAS) - II

Olivier Cogis Benoît Darties Sylvain Durand
Jean-Claude König Jérôme Palaysi

26 juillet 2005

Résumé

Dans ce rapport, nous étudions un aspect du problème de surveillance de trafic dans un réseau de télécommunication : lorsque l'ensemble des connexions est connu, placer le plus petit nombre d'appareils de surveillance sur les liens du réseaux de sorte que chaque connexion soit surveillée. Nous appelons CRAS ce problème. Nous montrons que ce problème se ramène à des problèmes connus et très étudiés (couverture d'ensemble, transversal...). Cette analogie nous permet d'en déduire des résultats de complexité pour le problème CRAS (NP-complétude, approximabilité). Nous présentons une heuristique gloutonne de recherche de dominant dans un biparti. L'analyse de sa complexité et de la qualité de ses solutions (en termes de garantie de performance) nous permet de déduire des résultats intéressants des instances particulières de CRAS (réseaux de communication en arbre ou en grille notamment).

1 Introduction

La surveillance du trafic dans les réseaux peut se dire active ou passive [NT04, CFGL05]. Le problème de surveillance passive présenté dans [CFGL05] consiste à placer des appareils de surveillance sur le plus petit nombre possible de liens d'un réseau pour contrôler une proportion fixée du trafic. Un réseau est représenté par un graphe¹, et chaque communication par une chaîne pondérée du graphe, ce qui conduit, pour tout rationnel $r \in]0, 1]$, à définir le problème *Partial Passive Monitoring* comme suit :

¹Les graphes considérés sont des graphes simples, c'est-à-dire des graphes non orientés, sans boucle ni arête multiple. On notera $E(G)$ l'ensemble des arêtes du graphe G et $V(G)$ l'ensemble de ses sommets. Si $X \subseteq V(G)$, on note $N_G(X)$, ou plus simplement $N(X)$, l'ensemble des voisins des sommets appartenant à X . Une chaîne d'ordre n est un graphe isomorphe au graphe P_n défini par $X(P_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ et $E(P_n) = \{ \{i, i+1\} \mid 1 \leq i < n \}$.

Problème 1 PPM_r (*Partial Passive Monitoring*)

Donnée : Un graphe G , un entier positif h , un ensemble de chaînes R dans G et une fonction de poids w de R dans $\mathbb{Q}^{+*}$, qui associe un poids à chaque chaîne de R .

Question : Existe-t-il un sous-ensemble $F \subseteq E(G)$ tel que $|F| \leq h$ et $\frac{\sum_{P \in R_F} w(P)}{\sum_{P \in R} w(P)} \geq r$ (où $R_F = \{P \mid P \in R \text{ et } E(P) \cap F \neq \emptyset\}$) ?

Dans [CFG05], il est montré que le problème PPM_1 est NP-complet. De fait, nous montrons qu'il en va de même de PPM_r pour tout rationnel $r \in]0, 1]$ avec des poids unitaires² (en remarquant que la constante r ne fait pas partie des données du problème tel que nous l'avons défini ici). À cet effet, nous introduisons la notion de **graphe biparti signé** : c'est un graphe H noté $H = (V_1, V_2, E)$ tel que $\{V_1, V_2\}$ soit une bipartition de $V(H)$, $E(H) = E$, et tel que toute arête de H ait une extrémité dans chacune des deux classes V_1 et V_2 . On notera que (V_1, V_2, E) et (V_2, V_1, E) désignent le même graphe biparti³, mais pas le même graphe biparti signé. Par la suite, les graphes bipartis seront toujours supposés signés, et $V_1(H)$, resp. $V_2(H)$, désignera toujours la première classe, resp. la deuxième classe, de sommets de H .

Nous définissons alors, pour tout rationnel $r \in]0, 1]$, le problème de *Dominance r -Partielle dans un Graphe Biparti* défini comme suit :

Problème 2 $DPGB_r$ (*Dominance r -Partielle dans un Graphe Biparti*)

Donnée : Un graphe biparti H et un entier positif h .

Question : Existe-t-il un sous-ensemble X de $V_1(H)$ avec $|X| \leq h$ tel que $\frac{|N_H(X)|}{|V_2(H)|} \geq r$?

Montrer la NP-complétude du problème $DPGB_r$ nous permet, en utilisant un résultat de « représentation » exposé plus loin, d'en déduire la NP-complétude du problème PPM_r avec poids unitaires.

Cependant, dans ce rapport, nous nous intéressons principalement au cas particulier où $r = 1$, ce qui nous conduit à définir le problème de *Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance* comme suit :

Problème 3 $CRAS$ (*Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance*)

Donnée : Un graphe connexe non orienté G , un ensemble R de chaînes dans G et un entier positif h .

Question : Existe-t-il un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E(G)$ avec $|F| \leq h$ et tel que si P est une chaîne de R alors $E(P) \cap F \neq \emptyset$?

Un tel sous-ensemble F sera appelé un **contrôle de R dans G** . Par la suite, $minCRAS$ désignera le problème d'optimisation « naturellement » associé au problème $CRAS$ (i.e. pour G et R donnés, déterminer le plus

²Lorsque $r = 1$, la fonction de poids est sans signification pour le problème.

³Lorsqu'un graphe est biparti, la bipartition $\{V_1, V_2\}$ n'est en général pas unique. Pour les graphes bipartis signés, la partition est à la fois spécifiée et ordonnée.

petit h pour lequel le problème *CRAS* admet une réponse positive pour l'instance (G, R, h) et, pour tout problème, nous utiliserons une notation similaire pour distinguer sa version décision de sa version optimisation.

En associant à toute instance (G, R, h) du problème *CRAS* le graphe biparti qu'on notera $B(G, R)$, pour lequel $V_1 = E(G)$, $V_2 = R$ et tel qu'une arête $e \in E(G)$ est adjacente dans $B(G, R)$ à une chaîne $C \in R$ si et seulement si e est une arête de C , on constate que (G, R, h) est une instance positive du problème *CRAS* si et seulement si $(B(G, R), h)$ est une instance positive du problème *DPGB₁*, problème que nous noterons dorénavant *DGB* (*Dominance dans un Graphe Biparti*).

Problème 4 *DGB* (*Dominance dans un Graphe Biparti*)

Donnée : Un graphe biparti H et un entier positif h .

Question : Existe-t-il un sous-ensemble X de $V_1(H)$ avec $|X| \leq h$ tel que $N_H(X) = V_2(H)$?

Or le problème *DGB* est un problème très étudié, plus connu sous ses interprétations ensemblistes :

- comme problème de *couverture*⁴, $V_2(G)$ est un ensemble S quelconque, les éléments de $V_1(G)$ sont des sous-ensembles de S , et $x \in V_2(G)$ est adjacent à $S' \in V_1(G)$ lorsque $x \in S'$; alors un dominant de $V_2(G)$ dans G est un ensemble $X \subseteq V_1(G)$ tel que $\bigcup_{S' \in X} S' = S$;
- comme problème de *transversal*⁵, $V_1(G)$ est un ensemble S quelconque, les éléments de $V_2(G)$ sont des sous-ensembles de S , et $x \in V_1(G)$ est adjacent à $S' \in V_2(G)$ lorsque $x \in S'$; alors un dominant de $V_2(G)$ dans G est un ensemble $X \subseteq S$ tel que pour chaque partie $S' \in S$ appartenant à $V_2(G)$, on ait $S' \cap X \neq \emptyset$.

On sait en particulier⁶ que le problème *minDGB* est NP-difficile et non-APX (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme polynomial résolvant *minDGB* à un facteur constant près, sauf si $P=NP$). Se pose donc la question de savoir si on peut voir le problème *minCRAS* comme un cas particulier du problème *minDGB* ou comme un problème aussi général.

Si H est un graphe biparti (et donc une instance du problème *minDGB*), il n'existe pas nécessairement d'instance (G, R) du problème *minCRAS* telle que $H = B(G, R)$. Cependant, appelons **sommet subsumé** d'un graphe tout sommet tel qu'il existe un autre sommet du graphe adjacent à tous ses voisins et, pour tout graphe biparti H , appelons **V_1 -simplifié** de H tout graphe biparti H' tel qu'il existe une suite $(H_0 = H, H_1, \dots, H_p = H')$, avec $p \geq 0$, telle que, pour tout $i \in [1, p]$, H_i soit obtenu à partir de H_{i-1} par la suppression d'un des sommets subsumés de $V_1(H_{i-1})$. On remarque que si H' est un V_1 -simplifié de H , alors l'instance H du problème *minDGB* admet comme solution optimale toutes les solutions optimales de l'instance H' . Ce qui invite à définir comme ***CRAS-représentable***

⁴En anglais, problème du *SET – COVER*.

⁵En anglais, problème du *HITTING – SET*.

⁶Pour des résultats plus complets, voir par exemple *SET – COVER* dans [ACG⁺03]

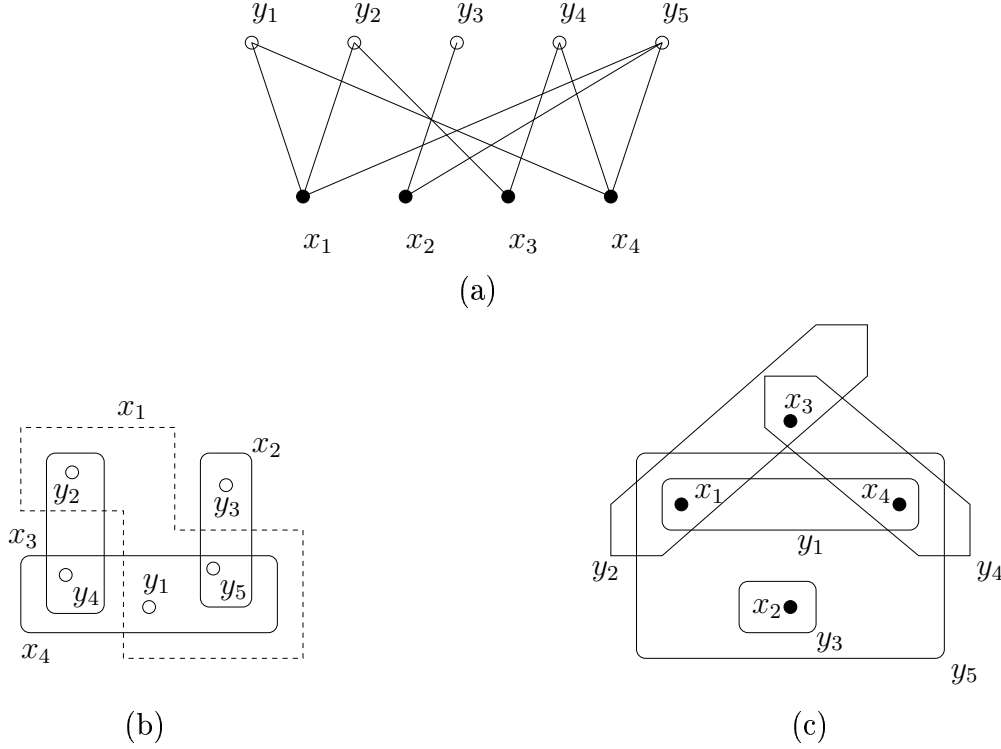


FIG. 1 – (a) Un biparti H , instance de minDGB : il faut choisir le plus petit nombre de x_j de sorte que chaque y_i soit voisin d'au moins un des x_j choisis. (b) L'interprétation *couverture d'ensemble* de l'instance H de minDGB : les y_i sont les éléments à couvrir par un nombre minimum de sous-ensembles x_j . (c) L'interprétation *transversal* de l'instance H de minDGB : les x_j sont les éléments dont il faut choisir un nombre minimum de sorte que chaque sous-ensemble y_i possède au moins un des éléments choisis.

toute instance H du problème minDGB pour laquelle il existe une instance (G, R) du problème minCRAS telle que H soit isomorphe à un V_1 -simplifié de $B(G, R)$. Une telle instance (G, R) sera appelée une **CRAS-représentation** de H (par exemple, l'instance de minCRAS de la figure 3 est une CRAS -représentation de l'instance de minDGB de la figure 1 (a)).

Il est alors montré dans [CFGL05] que toute instance du problème minDGB est CRAS -représentable⁷, ce qui rend le problème minCRAS aussi difficile que le problème minDGB . Autrement dit, si on considère l'interprétation d'une instance (G, R) du problème minCRAS comme une donnée pour la recherche d'un transversal de cardinal minimum (sélectionner au moins une arête de G par chaîne de R), perdre l'information précisant que les ensembles dont on cherche un transversal sont constitués d'arêtes

⁷Exprimé en d'autres termes, c'est l'argument essentiel de la preuve de la NP-complétude de PPM_1 proposée dans [CFGL05].

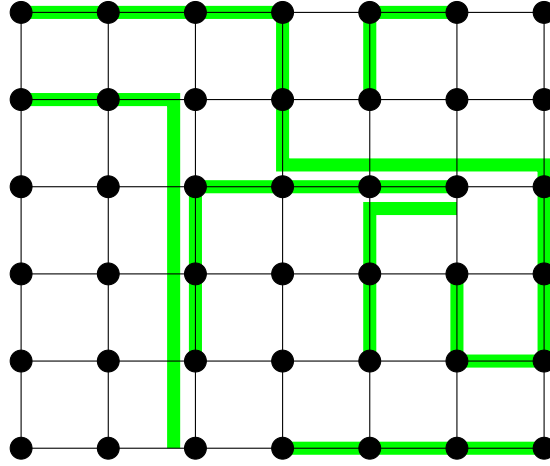


FIG. 2 – Une grille $M_{[6 \times 7]}$ et 6 chaînes dont 5 sont des chaînes ligne-colonne.

de chaînes d'un même graphe ne modifie pas la nature du problème qui est d'être NP-difficile et non-APX.

Toutefois, là où les réseaux de communication sont concernés, des topologies particulières de graphes et des classes particulières de chaînes peuvent être pertinentes. C'est le cas des arbres et aussi le cas des grilles⁸ : une **grille** $M_{n \times m}$ est un graphe dont les sommets (i, j) sont définis par un numéro de ligne i , $1 \leq i \leq n$, et un numéro de colonne j , $1 \leq j \leq m$, et où deux sommets sont adjacents si, et seulement si, ils ne diffèrent que sur une seule de leurs composantes et alors d'une valeur de 1. Dans une grille, une chaîne est une **chaîne de type ligne-colonne** lorsqu'elle possède un sommet (i, j) tel que tous ses autres sommets appartiennent à la ligne i ou à la colonne j (voir figure 2). Si ce sommet est unique, on l'appelle le **coin** de la chaîne, sinon on dit que la chaîne est de **type ligne** ou de **type colonne**.

Afin d'alléger un peu les locutions, si $\mathcal{F}$ est une classe particulière de graphes, et si $\mathcal{T}$ est un type particulier de chaînes, on dira qu'une instance de $\min DGB$ est **$\mathcal{F}$ -représentable par des chaînes de type $\mathcal{T}$** si elle est $CRAS$ -représentable par une instance (G, R) de $\min CRAS$ où G est un graphe de la classe $\mathcal{F}$ et toutes les chaînes de R sont de type $\mathcal{T}$, la mention du type $\mathcal{T}$ pouvant être omise lorsque ce type est indifférent.

Ainsi, nous montrons que tout graphe biparti est grille-représentable par des chaînes de type plus courtes chaînes, le calcul d'une représentation étant polynomial. Ce qui nous permet de conclure que le problème $\min CRAS$ reste NP-difficile et non-APX même restreint aux grilles et aux plus courtes chaînes, et d'en profiter pour finir de montrer que le problème PPM_r est NP-complet pour tout $r \in]0, 1]$.

La suite de ce travail porte sur la présentation d'une heuristique gloutonne pour le problème $\min DGB$ exprimée sous la forme d'un algorithme

⁸Par exemple, en ce qui concerne les réseaux tout-optique, voir [Bea00, Chi97, SSV97, KT03].

qui calcule une solution avec garantie de performance dans un rapport ρ qui est un entier calculé par l'exécution de l'algorithme.

Il en résulte que lorsqu'on sait majorer ρ a priori par une constante k en restreignant les données acceptées par l'algorithme, on en conclut que le problème *minDGB* restreint en conséquence est k -APX, c'est-à-dire qu'il existe un algorithme polynomial k -approché résolvant le problème. C'est notamment le cas pour le problème *minDGB* restreint aux instances arbre-représentables et pour le problème *minDGB* restreint aux instances grille-représentables avec des chaînes de type ligne-colonne de même classe⁹, qu'on montre tous deux être 2-APX. Le résultat relatif aux instances arbre-représentables est déjà connu¹⁰, mais le fait qu'il existe des instances de *minDGB* qui sont arbre-représentables mais pas grille-représentables avec des chaînes de type ligne-colonne, aussi bien que des instances de *minDGB* qui sont grille-représentables avec des chaînes de type ligne-colonne mais pas arbre-représentables, renforce l'intérêt de la démarche présentée ici. Lorsque $\rho = 1$, l'algorithme *AminDGB* est évidemment exact. C'est notamment le cas pour le problème *minDGB* restreint aux instances qui sont chaîne-représentables, problème dont on retrouve ainsi la polynomialité, laquelle, à son tour, entraîne celle du problème restreint aux instances qui sont anneau-représentables¹¹.

Enfin, nous évoquons brièvement la représentabilité « orientée » du problème *minDGB*. Lorsqu'il y a lieu (voir par exemple [BBG⁺97]) de représenter les réseaux de communication par des graphes orientés¹², le problème *CRAS* s'étend « naturellement » sous forme du problème de *Contrôle de Routes Orientées par des Appareils de Surveillance* :

Problème 5 *CROAS (Contrôle de Routes Orientées par des Appareils de Surveillance)*

Donnée : Un graphe orienté connexe G , un ensemble R de chemins dans G et un entier positif h .

Question : Existe-t-il un sous-ensemble d'arcs $F \subseteq E(G)$ avec $|F| \leq h$ et tel que si P est un chemin de R alors $E(P) \cap F \neq \emptyset$?

⁹De façon informelle, si on écarte les chaînes qui sont de type ligne ou de type colonne, les chaînes de type ligne-colonne sont réparties en quatre classes suivant que leur coin est leur sommet de plus petit indice de ligne et de plus petit indice de colonne, respectivement de « plus petit, plus grand », « plus grand, plus petit » et « plus grand, plus grand » indice de ligne, indice de colonne. La répartition des chaînes de type ligne ou de type colonne peut facilement se faire ensuite, (d'ailleurs de différentes façons).

¹⁰Restreint aux arbres, le problème *minCRAS* est exactement le problème *MULTI-CUT*, pour lequel il existe un algorithme 2-approché [GVY96], y compris dans une version plus générale où les arêtes sont munies d'un poids positif ou nul.

¹¹Ou encore cycle-représentable. Un cycle est un graphe, avec $n \geq 3$, isomorphe à la chaîne P_n augmentée de l'arête $\{1, n\}$.

¹²Si G est un graphe orienté, l'ensemble $E(G)$ désigne l'ensemble de ses arcs, qui sont des couples de sommets. Un chemin d'ordre n est un graphe orienté isomorphe au graphe P_n défini par $X(P_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ et $E(P_n) = \{(i, i+1) \mid 1 \leq i < n\}$.

Nous montrons alors, en définissant par analogie les notions orientées, que toute instance de *minDGB* est également *CROAS*-représentable, mais nous montrons que le passage du cas non orienté au cas orienté ne transporte pas automatiquement les résultats. En effet, une **étoile** d'ordre n est un graphe $G = (X, E)$ pour lequel les sommets de X peuvent être numérotés de 0 à $n - 1$ de sorte que $E = \{\{0, i\} | i \in [1..n - 1]\}$, le sommet 0 étant le **centre** de l'étoile. On sait que restreint aux étoiles, le problème¹³ demeure NP-difficile et 2-APX [GVY96] (au sens qu'on ne sait pas pour autant améliorer le facteur 2 valable pour les arbres en général), mais nous montrons que, dans ce cas particulier, l'orientation du graphe rend le problème plus facile : en définissant une **étoile orientée** comme une étoile dans laquelle chaque arête $\{i, j\}$ est remplacée par un arc (i, j) et/ou un arc (j, i) , nous montrons que le problème *minCROAS* restreint aux étoiles orientées est, lui, polynomial.

La suite du rapport est organisée comme suit :

- la section 2 montre la grille-représentabilité par des plus courtes chaînes du problème *minDGB* et en déduit que le problème *minCras* est NP-difficile et non-APX ;
- la section 3 établit la NP-complétude du problème *DPGB_r*, d'où on déduit celle du problème *PPM_r* ;
- la section 4 propose l'algorithme *AminDGB* et sa variante *AminDGB_k* qui offrent une garantie de performance, évaluée a posteriori dans le cas général, mais a priori pour certaines classes spécifiques de données ; en particulier, *AminDGB_k* permet de conclure à la nature APX de la restriction du problème *minDGB* au cas des instances qui sont arbre-représentables ou grille-représentables avec des chaînes de type ligne-colonne, ainsi qu'à la polynomialité du problème dans le cas des instances qui sont chaîne-représentables ou anneau-représentables ;
- la section 5 présente une version orientée de la *CRAS*-représentabilité du problème *DGB*, et montre que le problème *minCROAS* est à son tour NP-difficile et non-APX, tandis que le problème *minDGB* restreint aux instances qui sont étoile-orientée-représentables est polynomial ;
- la section 6 conclut le rapport.

2 CRAS-représentabilité de *DGB*

Soit H le graphe biparti représentant la relation d'appartenance des éléments d'un ensemble de cardinal 5 à ses sous-ensembles de cardinal 3,

¹³Il est équivalent au problème du MINIMUM SET-COVER. Voir par exemple les arbres de hauteur 1 dans [GVY96].

c'est-à-dire défini¹⁴ par

$$\begin{aligned} V_1(H) &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ V_2(H) &= \binom{\{1, 2, 3, 4, 5\}}{3} \\ E(H) &= \{ \{i, C\} \mid i \in V_1(H), C \in V_2(H), i \in C \} \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une instance (G, R) du problème *minCRAS* pour laquelle on ait $B(G, R) \approx H$. Alors les arêtes de G sont les entiers de 1 à 5 et n'importe quel choix de trois de ces nombres définit l'ensemble des arêtes d'une des chaînes de R . On en conclut que G est connexe, que ses sommets sont de degré maximum 2, puisque sinon trois arêtes incidentes à un même sommet ne pourraient pas appartenir à une même chaîne de R , que donc G est une chaîne ou un cycle de longueur 5. Dans les deux cas, il est impossible que pour chaque choix de trois arêtes il existe une chaîne de G qui les contienne mais ne contienne pas les deux autres.

Cependant H est bien *CRAS*-représentable. On peut par exemple définir un graphe G par :

$$\begin{aligned} V(G) &= \{ x_i \mid 1 \leq i \leq 5 \} \cup \{ y_i \mid 1 \leq i \leq 5 \} \\ &\cup \{ z_{i,j,k}^1 \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \cup \{ z_{i,j,k}^2 \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \\ E(G) &= \{ \{x_i, y_i\} \mid 1 \leq i \leq 5 \} \\ &\cup \{ \{z_{i,j,k}^1, y_i\} \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \cup \{ \{z_{i,j,k}^1, x_j\} \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \\ &\cup \{ \{z_{i,j,k}^2, y_j\} \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \cup \{ \{z_{i,j,k}^2, x_k\} \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \end{aligned}$$

et en posant

$$R = \{ (x_i, y_i, z_{i,j,k}^1, x_j, y_j, z_{i,j,k}^2, x_k, y_k) \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \}$$

on peut vérifier que H est un V_1 -simplifié de $B(G, R)$, ce qui met en correspondance les solutions optimales de H pour le problème *minDGB* avec une partie des solutions optimales de (G, R) . Cette mise en correspondance s'exprime plus généralement de la façon suivante, où on adopte la notation $OPT_{minP}(I)$ pour désigner la valeur d'une solution optimale de l'instance I pour un problème d'optimisation *minP* :

Lemme 1 *Si H est un graphe biparti CRAS-représentable, et si (G, R) est une CRAS-représentation de H , alors toute solution optimale de H pour le problème *minDGB* est, à une bijection près, une solution optimale de (G, R) pour le problème *minCRAS*. En particulier, $OPT_{minDGB}(H) = OPT_{minCRAS}(G, R)$.*

¹⁴La notation $\binom{X}{k}$, où X est un ensemble et k un entier, désigne l'ensemble des sous-ensembles de X de cardinal k . Nous l'avons empruntée à [MN98] .

Preuve Soit H un graphe biparti, soient $x, x' \in V_1(H)$ tels que $N_H(x) \subseteq N_H(x')$, et soit H' le graphe obtenu en supprimant le sommet x du graphe H . Alors, en notant que $V_2(H') = V_2(H)$, tout $X \subseteq V_1(H')$ qui domine $V_2(H')$ dans H' domine $V_2(H)$ dans H et, réciproquement, si $X \subseteq V_1(H)$ domine $V_2(H)$ dans H , alors $X \setminus \{x\} \cup \{x'\}$ domine $V_2(H')$ dans H' . Il en résulte que, pour le problème *minDGB*, toute solution optimale de H' est une solution optimale de H , résultat qui s'étend par récurrence à tout V_1 -simplifié de H .

Maintenant si H est le graphe biparti du lemme, il est, par hypothèse, isomorphe à un V_1 -simplifié de $B(G, R)$, disons encore H' . En vertu de ce qui précède, toute solution optimale $X \subseteq V_1(H')$ de H' pour le problème *minDGB* est également une solution optimale de $B(G, R)$ pour ce même problème, et, par définition de (G, R) , trivialement une solution optimale de (G, R) pour le problème *minCRAS*. L'isomorphisme est la bijection cherchée et l'égalité des valeurs des solutions optimales s'en déduit immédiatement. $\square$

Le résultat suivant montre que le problème *minCRAS* est « aussi général » que le problème *minDGB*.

Théorème 1 *Tout graphe biparti H est grille-représentable avec des chaînes de type plus courtes chaînes, et on sait calculer une telle représentation en un temps polynomial en fonction de $|V_2(H)|$. De plus, s'il existe un algorithme offrant une garantie de performance dans un rapport de $\rho(|V_2(H)|)$ pour toute instance H du problème *minDGB*, alors il en existe un offrant une garantie de performance dans un rapport de $\rho(|R|)$ pour toute instance (G, R) du problème *minCRAS*, et réciproquement.*

Preuve La figure 3 montre la réduction sur un exemple.

Soit H un graphe biparti avec $V_1(H) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $V_2(H) = \{y_1, \dots, y_m\}$. Considérons la grille $M = M_{n \times (n+1)}$ et, pour tout $i \in [1, n]$ appelons e_i l'arête $\{(i, i), (i, i+1)\}$ de M .

À tout $y \in V_2(H)$, si $i_1 < i_2 < \dots < i_{k_y}$ sont les indices $i \in [1, n]$ pour lesquels x_i et y sont voisins dans H , on associe la chaîne P_y de M définie par :

- (i_1, i_1) et $(i_{k_y}, i_{k_y} + 1)$ sont ses extrémités ;
- pour tout $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k_y}\}$ on a $e_i \in E(P_y)$;
- si l'arête $\{(i, j), (i, j+1)\} \in E(P)$ alors x_i et y sont voisins dans H ;
- si l'arête $\{(i, j), (i+1, j)\} \in E(P)$ alors x_j et y sont voisins dans H .

En posant $R = \{P_y\}_{y \in V_2(H)}$, soit (M, R) l'instance du problème *minCRAS* associée à l'instance H du problème *minDGB*. Par construction de (M, R) :

- si $e = \{(i, j), (i, j+1)\}$ est une arête d'une chaîne $C \in R$, alors e_i est également une chaîne de C ;

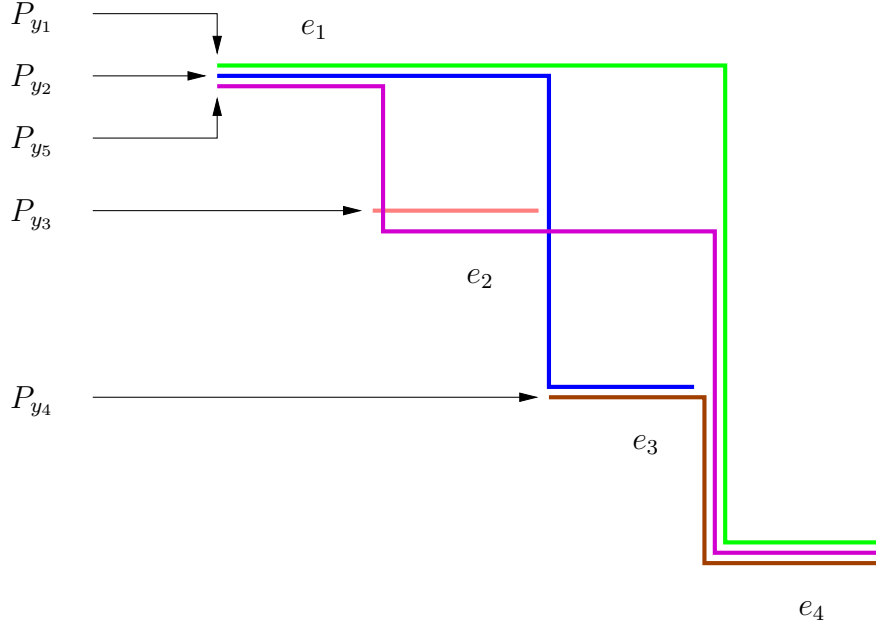


FIG. 3 – Une *CRAS*-représentation du biparti H de la figure 1 (a) dans une grille avec des plus courtes chaînes.

- si $e = \{(i, j), (i + 1, j)\}$ est une arête d'une chaîne $C \in R$, alors e_j est également une chaîne de C .

Il en résulte que tout sommet $e \in V_1(B(G, R)) \setminus \{e_i\}_{i \in [1, n]}$ est subsumé dans $B(G, R)$ par un e_i , $i \in [1, n]$, et donc que le sous-graphe de $B(G, R)$ induit par $\{e_i\}_{i \in [1, n]} \cup V_2(B(G, R))$ est un V_1 -simplifié de $B(G, R)$. La bijection de $V_1(H)$ dans $\{e_i\}_{i \in [1, n]}$ définie par $x_i \mapsto e_i$ permet de conclure que (G, R) est une grille-représentation de H avec des chaînes de type plus courtes chaînes, en notant que la construction de la représentation est bien polynomiale en fonction de $|V_2(H)|$.

Compte tenu du lemme 1, on conclut, pour ce qui concerne le résultat additionnel, en remarquant que $|V_2(H)| = |V_2(B(G, R))| = |R|$.

□

Les résultats connus sur le problème $\min DGB$ ¹⁵ permettent d'en déduire immédiatement :

Théorème 2 *Le problème $\min CRAS$, même restreint aux plus courtes chaînes dans les grilles, est NP-difficile et non-APX. Il est approximable avec un facteur d'approximation de $1 + \ln |R|$.*

¹⁵Voir par exemple MINIMUM SET-COVER dans [ACG⁺03].

3 NP-complétude de $DPGB_r$ et de PPM_r

Le problème DGB possède une interprétation ensembliste comme couverture d'ensemble. On peut étendre « naturellement » cette interprétation au problème $DPGB_r$ comme couverture r -partielle d'ensemble, ce qui apparente le problème $DPGB_r$ au problème de *Couverture Partielle d'Ensemble* introduit par M. Kearns [Kea90], à la différence près que r est une constante pour le problème DGB_r et une donnée pour le problème de *Couverture Partielle d'Ensemble*. Ce qui rend bien sûr ce dernier NP-Complet puisque pour $r = 1$ c'est le problème DGB .

Nous montrons ici que quelle que soit la valeur du rationnel $r \in]0, 1]$, le problème $DPGB_r$ est NP-Complet.

Théorème 3 *Pour tout rationnel $r \in]0, 1]$, le problème $DPGB_r$ est NP-Complet.*

Preuve Il est clair que $DPGB_r$ est dans NP. Montrons que le problème DGB restreint¹⁶ aux graphes bipartis sans point isolé dans V_2 , est polynomialement réductible au problème $DPGB_r$, ce qui établira le résultat. Un exemple de réduction est donné à la figure 4.

Soit $I = (H, h)$ une instance du problème DGB et soit $r = \frac{p}{q}$. Soit $I' = (H', p \times h)$ une instance de $DPGB_r$ pour laquelle H' est défini par

$$H' = (p \otimes H) \cup ((q - p) \times |V_2(H)| \otimes K_2)$$

c'est-à-dire que H' est l'union disjointe de p copies de H et du nombre nécessaire de copies de K_2 , le graphe composé d'une unique arête, pour que $|V_2(H')| = q \times |V_2(H)|$. Ainsi, les sommets de $V_2(H')$ qui proviennent des p copies de H , dont on notera $p \otimes V_2(H)$ l'ensemble, sont en proportion de $\frac{p}{q}$ dans $V_2(H')$.

Si $X \in V_1(H)$ est une solution de l'instance I pour le problème DGB , on en déduit une solution $X' = p \otimes X \subseteq V_1(H')$ de l'instance I' du problème $DPGB_r$: $|X'| = p \times |X| \leq p \times h$ et X' domine $p \otimes V_2(H)$ dans H' , c'est-à-dire domine H' dans une proportion $\frac{|p \otimes V_2(H)|}{|V_2(H')|} = \frac{p \times |V_2(H)|}{q \times |V_2(H)|} = \frac{p}{q}$.

Inversement, si X' est une solution de l'instance I' pour le problème $DPGB_r$ et s'il existe un sommet $y \in p \otimes V_2(H)$ qui n'a aucun voisin dans X' , comme $|N(X')| \geq \frac{p}{q} \times |V_2(H')| = \frac{p \times q \times |V_2(H)|}{q} = |p \otimes V_2(H)|$, il existe nécessairement un sommet $y' \in V_2(H')$ n'appartenant pas aux p copies de H et qui est adjacent dans H' à un sommet de X' , disons x' , lequel x' n'est adjacent dans H' qu'à y' . Alors, si x est un voisin de y dans H' , $(X' \setminus \{x'\}) \cup \{x\}$ est également une solution de l'instance I' pour le problème $DPGB_r$. Ce qui permet de conclure qu'il existe une solution X'' de l'instance I' pour le problème $DPGB_r$ qui domine $p \otimes V_2(H)$ dans $V_2(H)$. Alors, puisque $|X''| \leq p \times h$, il existe nécessairement une des p

¹⁶Cette restriction conserve la NP-complétude du problème.

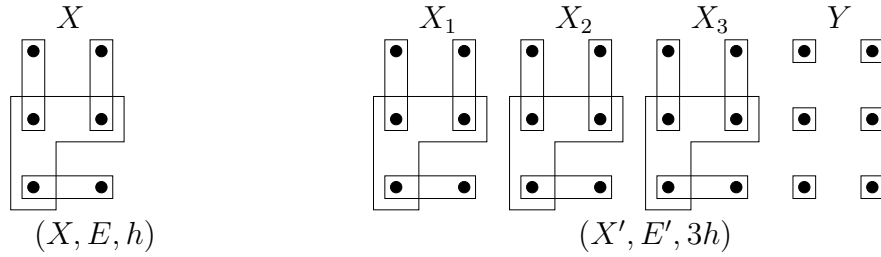


FIG. 4 – Exemple avec $r = 3/4$ (une solution de $DPGB_{3/4}$ pour $(X', E', 3h)$ donne une solution de DGB pour (X, E, h) et réciproquement).

copies de H , disons H_{opt} , telle que $|X'' \cap V_1(H_{opt})| \leq h$, ce qui permet de conclure que l'instance I du problème DGB est une instance positive.

Ce qui achève la démonstration. □

Ce résultat nous permet maintenant de statuer sur la complexité du problème PPM_r :

Théorème 4 *Le problème PPM_r avec poids unitaires est NP-Complet pour tout rationnel $r \in]0, 1]$.*

Preuve En adaptant les preuves du lemme 1 et du théorème 1 afin de tenir compte de la proportion r , on montre que le problème $DPGB_r$ est polynomialement réductible au problème PPM_r . Le théorème 3 permet de conclure. □

4 Un algorithme glouton pour $minDGB$

4.1 Une démarche gloutonne

Soit H un graphe biparti. Deux sommets $x, y \in V_2(H)$ sont dits **en conflit**¹⁷ s'ils sont à distance 2 dans H . Si $y \in V_2(H)$, on appelle **voisinage suffisant de y dans H** tout ensemble $X \subseteq N_H(y)$ tel que quel que soit $y' \in V_2(H)$, si y' est en conflit avec y alors $X \cap N_H(y') \neq \emptyset$.

Tout $y \in V_2(H)$ possède un voisinage suffisant trivial : $N_H(y)$. Mais le calcul d'un voisinage suffisant de cardinal minimum est en général difficile. Plus précisément, définissons comme suit le problème du *Voisinage Suffisant* :

Problème 6 *VS (Voisinage Suffisant)*

¹⁷La terminologie employée ici provient de la *CRAS*-représentabilité de DGB : dans les représentations de problèmes de réseaux, notamment d'attribution de longueur d'ondes dans les réseaux tout-optique, deux chaînes d'un graphe qui partagent au moins une arête sont dites *en conflit* [BBG⁺97].

Donnée : Un graphe biparti H , un sommet $y \in V_1(H)$ et un entier positif h .

Question : Existe-t-il un voisinage suffisant de y de cardinal au plus h ?

On a alors le résultat suivant.

Proposition 1 *Le problème VS est NP-complet.*

Preuve Le problème est clairement dans NP. Soit maintenant (H, h) une instance du problème DGB, et soit H' le graphe biparti obtenu en ajoutant à $V_2(H)$ un sommet y_0 adjacent à tous les sommets de $V_1(H)$. Alors tout $X \subseteq V_1(H)$ est un voisinage suffisant de y_0 dans H' si et seulement si $N_H(X) = V_2(H)$. On conclut immédiatement en rappelant que le problème DGB est NP-complet, même restreint aux graphes bipartis sans sommet isolé dans V_2 . $\square$

L'algorithme 1 adopte une démarche gloutonne qui calcule une solution d'une instance du problème *minDGB*, et fournit a posteriori une garantie de performances de cette solution.

Données : Un graphe biparti H

Résultat : Un sous-ensemble $X \subseteq V_1(H)$ qui domine $V_2(H)$ et un rationnel ρ tel que $|X| \leq \rho \times OPT_{minDGB}(H)$.

$H_{courant} \leftarrow H$

$X \leftarrow \emptyset$

$i \leftarrow 0$

tant que $V_2(H_{courant}) \neq \emptyset$ **faire**

$i \leftarrow i + 1$

 Choisir un sommet $y_i \in V_2(H_{courant})$

 Choisir un voisinage suffisant X_i de y_i

$X \leftarrow X \cup X_i$

 Retirer y_i de $H_{courant}$ et tous les sommets $y' \in V_2(H_{courant})$ en conflit avec y_i

fin

$\rho \leftarrow \frac{|X|}{i}$

Retourner X et ρ

Algorithme 1 : L'algorithme AminDGB.

Proposition 2 *Appliqué à un graphe biparti H , l'algorithme 1 retourne un sous-ensemble $X \subseteq V_1(H)$ qui domine $V_2(H)$ et un rationnel ρ tels que $|X| \leq \rho \times OPT_{minDGB}(H)$.*

Preuve La convergence de l'algorithme est évidente. Appelons p la valeur finale affectée à i par l'algorithme. À l'itération i , soit $Y_i \subseteq V_2(H_{\text{courant}})$ l'ensemble constitué du sommet y_i choisi et des sommets de $V_2(H_{\text{courant}})$ qui sont en conflit avec lui dans H_{courant} , et soit Y'_i son complément dans $V_2(H_{\text{courant}})$. Comme X_i couvre Y_i dans $V_2(H_{\text{courant}})$, on vérifie que $X = \bigcup_{i \in [1, p]} X_i$ domine $V_2(H)$ dans H . D'autre part, aucun y_i n'est en conflit avec aucun sommet de Y'_i , donc avec aucun y_j pour $j \in [i + 1, p]$. Il en résulte que si $X' \subseteq V_1(H)$ domine $V_2(H)$ dans H , aucun sommet de X' n'est voisin de plus d'un y_i , pour $i \in [1, p]$, et donc que $|X'| \geq p$. Par conséquent $OPT_{\min DGB}(H) \geq p$ et l'inégalité $|X| \leq \rho \times OPT_{\min DGB}(H)$ s'en déduit immédiatement puisque $|X| = p \times \rho$. $\square$

Dans la proposition 2, le rapport ρ dépend du nombre d'itérations effectuées par l'algorithme pour le calcul de la solution. On peut s'émanciper de ce décompte et le remplacer par une autre grandeur calculée au cours de l'exécution de l'algorithme, au prix d'un rapport de performance moins ajusté.

Proposition 3 *Soit $k_{\max}$ la taille maximum prise par les voisinages suffisants choisis à chaque itération au cours de l'exécution de l'algorithme 1 appliqué au graphe biparti H . Alors l'ensemble X retourné par l'algorithme 1 est une solution $k_{\max}$ -approchée de l'instance H pour le problème $\min DGB$.*

Preuve On s'appuie sur la proposition 2 et sur sa démonstration. On a :

$$p \leq OPT_{\min DGB}(H)$$

et par construction de X

$$|X| \leq \sum_{i \in [1, p]} |X_i|$$

(on montrerait d'ailleurs facilement que $|X| = \sum_{i \in [1, p]} |X_i|$).

D'où :

$$\begin{aligned} |X| &\leq \frac{\sum_{i \in [1, p]} |X_i|}{p} \times OPT_{\min DGB}(H) \\ &\leq \frac{\sum_{i \in [1, p]} k_{\max}}{p} \times OPT_{\min DGB}(H) = k_{\max} \times OPT_{\min DGB}(H) \end{aligned}$$

$\square$

Il ressort de ce qui précède que si on savait calculer polynomialement les voisinages suffisants élus à chaque itération, et si on savait majorer a priori leur taille par une constante entière k , alors le problème serait k -APX. Cela ne se peut dans le cas général, puisque le problème $\min DGB$ est non-APX. En revanche, le résultat suivant fixe des conditions suffisantes favorables.

Un voisinage ***k*-suffisant** est un voisinage suffisant de cardinal au plus *k*. Étant donné un entier positif *k*, un sommet de $V_2(H)$ est dit ***k*-dominable** lorsqu'il possède un voisinage *k*-suffisant.

Étant donné un entier positif *k*, une classe de graphes bipartis $\mathcal{C}$ est dite ***k*-suffisante** lorsque :

1. tout graphe biparti $H \in \mathcal{C}$ possède au moins un sommet *k*-dominable qu'on sait déterminer polynomialement ainsi qu'un de ses voisinages *k*-suffisants ;
2. tout graphe H' obtenu à partir d'un graphe $H \in \mathcal{C}$ par suppression de sommets de $V_2(H)$ est encore dans $\mathcal{C}$.

Données : Un graphe biparti H appartenant à une classe *k*-suffisante

Résultat : Un sous-ensemble $X \subseteq V_1(H)$ qui domine $V_2(H)$ et tel que $|X| \leq k \times OPT_{minDGB}(H)$.

$H_{courant} \leftarrow H$

$X \leftarrow \emptyset$

$i \leftarrow 0$

tant que $V_2(H_{courant}) \neq \emptyset$ **faire**

$i \leftarrow i + 1$

 Choisir un sommet *k*-dominable $y_i \in V_2(H_{courant})$

 Choisir un voisinage *k*-suffisant X_i de y_i

$X \leftarrow X \cup X_i$

 Retirer y_i de $H_{courant}$ et tous les sommets $y' \in V_2(H_{courant})$ en conflit avec y_i

fin

Retourner X

Algorithme 2 : L'algorithme $AminDGB_k$.

On peut alors, en se restreignant au cas des classes *k*-suffisantes de graphes bipartis, spécialiser l'algorithme $AminDGB$ et définir pour tout entier positif *k* l'algorithme $AminDGB_k$ (cf. algorithme 2), ce qui permet le résultat suivant.

Théorème 5 *Soit k un entier positif et soit $\mathcal{C}$ une classe *k*-suffisante de graphes bipartis. Alors le problème DGB restreint à la classe $\mathcal{C}$ est k -APX.*

Preuve Il suffit d'appliquer l'algorithme 2 à une instance de la classe $\mathcal{C}$, en remarquant que, dans le cas des classes *k*-suffisantes, les opérations de choix de l'algorithme sont toujours définies et exécutables en temps polynomial. La proposition 3 permet de conclure. $\square$

Si les conditions imposées pour qu'une classe de graphes bipartis soit *k*-suffisante apparaissent très fortes, la sous-section suivante montre que la *CRAS-représentabilité* du problème DGB fournit « naturellement » des classes de graphes bipartis *k*-suffisantes.

4.2 Des classes d'instances pour lesquelles minDGB est APX

Nous présentons des classes de graphes bipartis dont la suffisance se déduit de leur CRAS -représentabilité.

Comme il est établi que tout graphe biparti est CRAS -représentable ([CFG05], théorème 1), et comme toute solution optimale d'un biparti H pour le problème minDGB est, à une bijection près, une solution optimale de n'importe laquelle de ses CRAS -représentations pour le problème minCRAS (lemme 1), il est commode, pour étudier le problème minDGB dans ses versions de CRAS -représentation, d'étendre aux contrôles de routes dans les réseaux les définitions de k -suffisance introduites à la sous-section précédente.

Soit (G, R) une instance du problème minCRAS . On dit qu'un ensemble d'arêtes $E \subseteq E(C)$ d'une chaîne $C \in R$ est un **contrôle suffisant** de C dans (G, R) lorsque c'est un voisinage suffisant de C dans $B(G, R)$, le graphe biparti associé à l'instance (G, R) . On définit de même par extension les notions de **contrôle k -suffisant** d'une $C \in R$ dans (G, R) , de **chaîne k -contrôlable** dans (G, R) , et de **classe k -suffisante d'instances du problème minCRAS** .

Appliquer la démarche gloutonne mise en œuvre par l'algorithme 2 sur le biparti $B(G, R)$ s'interprète alors en ces termes, en notant R_{courant} l'ensemble de chaînes modifié en cours d'exécution : à l'itération i , choisir une chaîne k -contrôlable C_i de R_{courant} , choisir un contrôle k -suffisant E_i de C_i , et supprimer C_i de R_{courant} ainsi que toutes les chaînes de R_{courant} en conflit avec elle. Le théorème 5 invite donc à rechercher des instances (G, R) du problème minCRAS telles que $B(G, R)$ appartienne à une classe k -suffisante pour un entier positif k .

4.2.1 Classes 1-suffisantes

Compte tenu du théorème 5, quand il est restreint à une classe 1-suffisante de graphes bipartis, le problème minDGB devient polynomial. C'est le cas des graphes bipartis chaîne-représentables.

Lemme 2 *Soit P une chaîne et R un ensemble de chaînes de P . Alors R possède une chaîne 1-contrôlable dans (P, R) .*

Preuve Soit $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ une chaîne et R un ensemble de chaînes de P . Pour toute chaîne $C \in R$, posons $\text{imax}(C) = \max\{i \in [1, n] \mid x_i \in C\}$, resp. $\text{imin}(C) = \min\{i \in [1, n] \mid x_i \in C\}$, et choisissons une chaîne C^* telle que $\text{imax}(C^*)$ soit le plus petit possible, resp. $\text{imin}(C^*)$ soit le plus grand possible. Alors $\{x_{\text{imax}(C)-1}, x_{\text{imax}(C)}\}$, resp. $\{x_{\text{imin}(C)}, x_{\text{imax}(C)+1}\}$, est un contrôle suffisant de C^* dans (P, R) . Ce qui permet de conclure.

□

Proposition 4 *La classe des instances du problème $\min CRAS$ où le graphe est une chaîne, est une classe 1-suffisante.*

Preuve Il suffit de constater que le calcul d'une des chaînes 1-suffisantes dont la proposition 2 affirme l'existence, est polynomial. $\square$

On en déduit immédiatement de ce qui précède :

Théorème 6 *Le problème $\min DGB$ restreint aux instances chaîne-représentables est polynomial.*

Où, de façon équivalente, le problème $\min CRAS$ restreint aux chaînes est polynomial.

Ce résultat peut se « généraliser » dans les grilles.

Lemme 3 *Soit G une grille et R un ensemble de chaînes de type ligne ou de type colonne. Alors R possède une chaîne 1-contrôlable dans (G, R) .*

Preuve Appelons pôle d'une chaîne de type ligne, respectivement de type colonne, son sommet de plus petit numéro de colonne, respectivement de plus petit numéro de ligne. Toute chaîne ligne dont le pôle a un numéro de colonne maximum parmi les numéros de colonne des pôles des chaînes ligne de même numéro de ligne, respectivement toute chaîne colonne dont le pôle a un numéro de ligne maximum parmi les numéros de ligne des pôles des chaînes colonne de même numéro de colonne, est une chaîne 1-suffisante : son arête incidente à son pôle est un contrôle suffisant de la chaîne. Ce qui permet de conclure. $\square$

Proposition 5 *La classe des instances du problème $\min CRAS$ où le graphe est une grille et les chaînes sont des chaînes ligne ou des chaînes colonne est une classe 1-suffisante.*

Preuve Il suffit de constater que le calcul d'une des chaînes 2-suffisantes dont la proposition 3 affirme l'existence, est polynomial. $\square$

On en déduit immédiatement de ce qui précède :

Théorème 7 *Le problème $\min DGB$ restreint aux instances grille-représentables par des chaînes qui sont des chaînes de type ligne ou des chaînes de type colonne est polynomial.*

Où, de façon équivalente, le problème $\min CRAS$ restreint aux grilles avec des chaînes qui sont des chaînes ligne ou des chaînes colonne est polynomial.

4.2.2 Classes 2-suffisantes

Nous présentons deux classes de graphes bipartis dont les $CRAS$ -représentations sont des instances pertinentes du problème $\min CRAS$

Classes arbres-représentables

Proposition 6 *Soit A un arbre et R un ensemble de chaînes de A . Alors R possède une chaîne 2-contrôlable dans (A, R) .*

Preuve Choisissons un sommet quelconque r de A et, pour toute chaîne $C \in R$, appelons coin de C le sommet de C qui est le plus proche de r dans A . Si on choisit $C_m \in R$ de sorte que son coin soit le plus éloigné possible de r , on constate que l'ensemble des arêtes de C_m incidentes à son coin (il peut éventuellement n'y avoir qu'une arête), constitue un contrôle 2-suffisant de C_m dans (A, R) . Ce qui permet de conclure. $\square$

Proposition 7 *La classe des instances du problème minCRAS où le graphe est un arbre est une classe 2-suffisante.*

Preuve Il suffit de constater que le calcul d'une des chaînes 2-suffisantes dont la proposition 6 affirme l'existence, est polynomial. $\square$

On en déduit immédiatement du théorème 5 le résultat suivant.

Théorème 8 ([GVY96]) *Le problème minDGB restreint aux instances arbre-représentables est 2-APX.*

Ou, de façon équivalente, le problème minCRAS restreint aux arbres est 2-APX.

Enfin, il est intéressant de remarquer que l'arbre-représentabilité du problème minDGB présente la particularité de pouvoir se passer de la V_1 -simplification.

Proposition 8 *Un graphe biparti H est arbre-représentable si et seulement si il existe une instance (A, R) de minCRAS telle que H soit isomorphe à $B(A, R)$.*

Preuve Découle immédiatement du lemme 4 ci-dessous. $\square$

Lemme 4 *Si (A, R) est une instance du problème minCRAS où A est un arbre, et si $e \in V_1(B(A, R))$ est un sommet subsumé de $B(A, R)$, alors, en appelant A' l'arbre obtenu à partir de A en contractant l'arête e et R' l'ensemble des chaînes de A' obtenues à partir des chaînes de R en contractant si besoin l'arête e , le biparti $B(A', R')$ est le sous-graphe du biparti $B(A, R)$ obtenu par suppression du sommet e .*

Preuve Le fait que e soit subsumé dans $B(A, R)$ signifie qu'aucune chaîne de R n'est réduite à l'arête e et la contraction de e entraîne de fait la contraction de chaque chaîne de R en une chaîne de A' . On conclut aisément. $\square$

Classes grille-représentables avec des chaînes de type ligne-colonne

Dans une grille, appelons **proprement ligne-colonne** les chaînes ligne-colonne qui ne sont pas de type ligne ni de type colonne. On peut les répartir en quatre classes suivant que leur coin est, parmi tous les sommets de la chaîne, leur sommet :

- **classe I** : de plus petit numéro de ligne et de plus petit numéro de colonne
- **classe II** : de plus petit numéro de ligne et de plus grand numéro de colonne
- **classe III** : de plus grand numéro de ligne et de plus grand numéro de colonne
- **classe IV** : de plus grand numéro de ligne et de plus petit numéro de colonne

Lemme 5 *Soit G une grille et R un ensemble de chaînes proprement ligne-colonne appartenant à une même classe i (avec $i \in \{I, II, III, IV\}$). Alors R possède une chaîne 2-contrôlable dans (G, R) .*

Preuve Montrons le par exemple pour la classe I. Les chaînes de R s'ordonnent suivant l'ordre produit sur les numéros de ligne et de colonne de leur coin. Soit C une chaîne de R , maximale pour ce préordre partiel. On constate que les deux arêtes de C incidentes à son coin en constituent un contrôle 2-suffisant. Ce qui permet de conclure. $\square$

Proposition 9 *La classe des instances du problème $\min CRAS$ où le graphe est une grille et les chaînes des chaînes proprement ligne-colonne appartenant à une même classe i (avec $i \in \{I, II, III, IV\}$) est une classe 2-suffisante.*

Preuve Il suffit de constater que le calcul d'une des chaînes 2-suffisantes dont la proposition 5 affirme l'existence, est polynomial. $\square$

Le fait que restreint aux grilles avec des chaînes de type ligne-colonne le problème $CRAS$ reste NP-complet [Bag05] confère son intérêt au résultat suivant.

Théorème 9 *Le problème $\min DGB$ restreint aux instances grille-représentables par des chaînes de type ligne-colonne est APX.*

Ou, de façon équivalente, le problème $\min CRAS$ restreint aux grilles avec des chaînes de type ligne-colonne est APX.

Preuve On démontre le théorème dans sa version $\min CRAS$. Soit (G, R) une instance du problème $\min CRAS$ telle que G soit une grille et R un ensemble de chaînes ligne-colonne de G . Pour chaque classe i avec $i \in \{I, II, III, IV\}$, soient respectivement R_i le sous-ensemble des chaînes

de R qui sont dans la classe i et X_i le dominant retourné par l'algorithme 2 appliqué à l'instance (G, R_i) . D'après les résultats précédents (proposition 3 et proposition 5), $|X_i| \leq 2 \times OPT_{minDGB}(G, R_i)$, et par conséquent $|X_i| \leq OPT_{minDGB}(G, R)$. D'autre part, si R_0 est l'ensemble des chaînes ligne et des chaînes colonne de R , soit X_0 le dominant retourné par l'algorithme 2 appliqué à l'instance (G, R_0) . D'après les résultats précédents (proposition 3 et proposition 5), $|X_0| \leq OPT_{minDGB}(G, R_0) \leq OPT_{minDGB}(G, R)$. Alors

$$\bigcup_{0 \leq i \leq 5} X_i$$

est une solution de l'instance (G, R) de cardinal au plus

$$9 \times OPT_{minDGB}(G, R)$$

Ce qui permet de conclure. $\square$

La preuve du théorème 9 établit plus précisément que le problème *minDGB* restreint aux instances grille-représentables par des chaînes de type ligne-colonne est 9-APX. En regroupant dans la démonstration les classes R_0 , R_1 et R_3 d'une part, et R_2 et R_4 d'autre part, on aurait pu montrer que le problème est 4-APX. En fait, par une méthode différente, le problème a depuis été montré être 2-APX [Bag05], ce qui est la raison de notre moindre effort pour établir ici que le problème est APX.

4.2.3 Quelques remarques sur les classes 2-suffisantes

La classe des graphes bipartis cycle-représentables

Proposition 10 *La classe des instances du problème *minCRAS* où le graphe est un cycle est 2-suffisante mais pas 1-suffisante.*

Preuve Soit (G, R) une instance du problème *minCRAS* où G est un cycle. Soit $C \in R$ une chaîne minimale dans R au sens de l'inclusion des arêtes. On constate que l'ensemble des arêtes de C qui sont adjacentes à ses extrémités (il peut n'y avoir qu'une arête) constitue un contrôle 2-suffisant de C . Le calcul d'une telle chaîne étant manifestement polynomial, la classe des instances du problème *minCRAS* où le graphe est un cycle est bien 2-suffisante. En revanche, si G est un triangle et R l'ensemble de ses chaînes de longueur 2, aucune chaîne de R n'est 1-contrôlable, ce qui permet de conclure. $\square$

Toutefois, le problème *minCRAS* restreint aux cycles est connu pour être polynomial. Nous montrons ici comment ce résultat peut se déduire du théorème 6.

Corollaire 1 *Le problème *minDGB* restreint aux instances cycle-représentables est polynomial.*

Ou, de façon équivalente, le problème *minCRAS* restreint aux cycles est polynomial.

Preuve On démontre le résultat dans sa version *minCRAS*. Soit (G, R) une instance du problème *minCRAS* où G est un cycle, et soit $e \in E(G)$. Appelons respectivement G^e le graphe G privé de l'arête e et R^e l'ensemble des chaînes de R qui ne contiennent pas l'arête e . Soit alors X^e un contrôle optimal de (G^e, R^e) , qu'on sait calculer polynomialement en vertu du théorème 6, puisque G^e est une chaîne. On constate que tout élément de l'ensemble $\{\{e\} \cup X^e\}_{e \in E(G)}$ de plus petit cardinal possible est une solution optimale de (G, R) , ce qui permet de conclure. $\square$

À propos des classes 2-suffisantes

Nous venons de voir que les instances de *DGB* qui sont arbre-représentables ou grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne d'une même classe (*I*, *II*, *III* ou *IV*) forment une classe 2-suffisante. En outre, l'ensemble des instances de *minDGB* qui sont arbre-représentables et l'ensemble de celles qui sont grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne d'une même classe ont à l'évidence une intersection non vide. Nous allons montrer qu'il ne s'agit pourtant pas du même ensemble. A cet effet, nous notons sous forme de graphe les conflits en définissant le **graphe des conflits** d'un biparti H comme le graphe admettant $V_1(H)$ comme ensemble de sommets et en définissant le voisinage d'un sommet, dans le graphe des conflits, comme l'ensemble des sommets de $V_1(H)$ qui sont en conflit avec lui.

Lemme 6 *Soit H un graphe biparti et soit (G, R) une CRAS-représentation de H . Les graphes des conflits de H et de (G, R) sont isomorphes.*

Preuve Le résultat découle de la définition même de la *CRAS*-représentation : la suppression d'un sommet subsumé d'un biparti H ne change pas son graphe des conflits. $\square$

Proposition 11 *Il existe des instances de *minDGB* qui ne sont pas arbre-représentables mais grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne d'une même classe.*

Preuve Considérons le biparti H avec $V_1(H) = \{x_0, \dots, x_5\}$, $V_2(H) = \{y_0, \dots, y_6\}$ et dont les arêtes sont données par la figure 5 (a).

D'un côté on peut vérifier, grâce par exemple à la figure 5 (c), que H est bien grille-représentable avec des chaînes ligne-colonne d'une même classe.

D'un autre côté H n'est pas arbre-représentable. En effet, appelons G le graphe des conflits de H et soit (A, R) une arbre-représentation de H . D'après le lemme 6, le graphe des conflits de (A, R) est isomorphe à G .

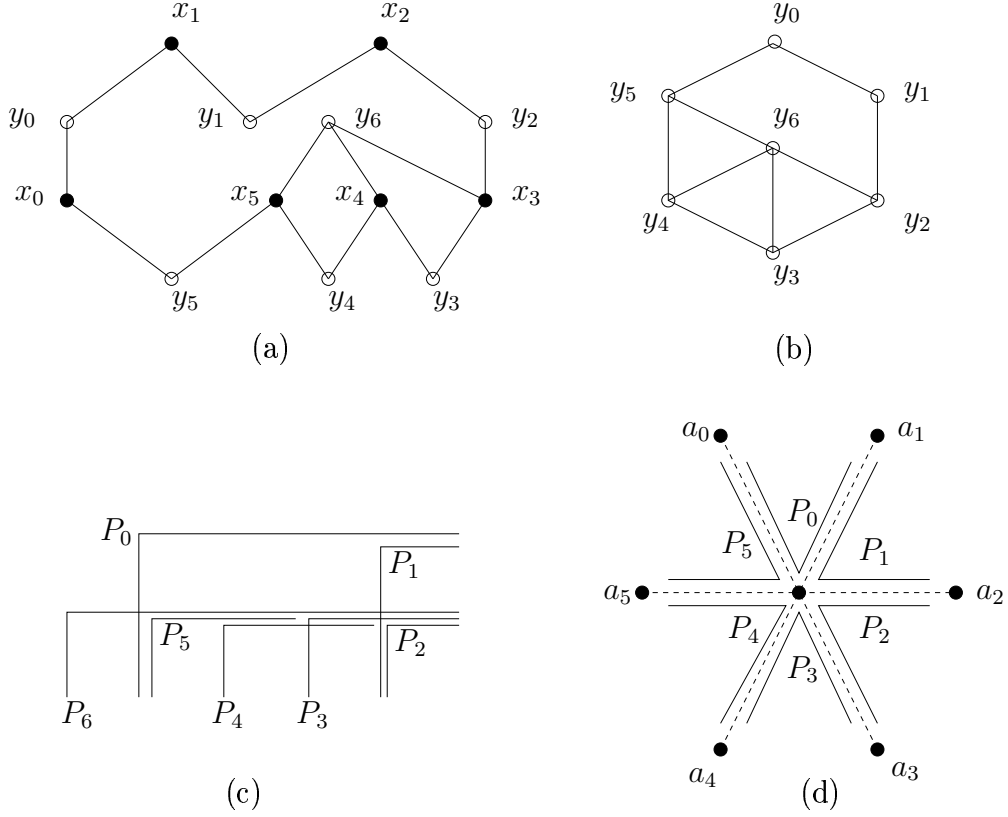


FIG. 5 – (a) Le biparti H d’une instance I de $\min DGB$. (b) Le graphe des conflits de H contient un cycle sans corde de longueur 6. (c) Une grille-représentation de I avec des chaînes ligne-colonne d’une même classe. (d) Si I est arbre-représentable alors toute arbre-représentation (A, R) contient une « pie » dont les chaînes sont les chaînes P_0 à P_5 . On peut identifier l’arête $\{a_i, b\}$ au sommet x_i de H et la chaîne P_j au sommet y_j de H . Puisque A est un arbre, la septième chaîne P_6 ne peut pas passer à la fois par les arêtes $\{b, a_3\}$, $\{b, a_4\}$ et $\{b, a_5\}$.

Comme G possède un cycle sans corde de longueur 6 dont $(y_0, \dots, y_5)$ est un des parcours (cf. figure 5 (b)), A possède [GJ85] :

1. une étoile à 6 branches que nous noterons chacune $\{a_i, b\}$ pour tout $i \in [0, 5]$;
2. 6 chaînes $P_0, \dots, P_5$ telles que pour tout $i \in [0, 4]$, les arêtes $\{a_i, b\}$ et $\{a_{i+1}, b\}$ appartiennent à la chaîne P_i et les arêtes $\{a_5, b\}$ et $\{a_0, b\}$ à la chaîne P_5 (cf. figure 5 (d)).

(dans [GJ85], une étoile avec de telles chaînes est appelée « **pie** »).

La septième chaîne, P_6 , est en conflit avec P_2, P_3, P_4 et P_5 , mais ni avec P_0 , ni avec P_1 . En considérant les sous-arbres de A engendrés par la suppression du sommet b , on constate que $e_3 := \{a_3, b\}$ et $e_5 := \{a_5, b\}$ sont des arêtes de P_6 et que toute autre arête e de A générant dans $B(A, R)$ un sommet de $V_1(B(A, R))$ de degré 3 ne peut être que dans $E(P_2) \cap E(P_3) \cap E(P_6)$ ou dans $E(P_4) \cap E(P_5) \cap E(P_6)$. Autrement dit, $N_{B(A, R)}(e) = N_{B(A, R)}(e_3)$ ou $N_{B(A, R)}(e) = N_{B(A, R)}(e_5)$. Donc, contrairement à $V_1(H)$, il n'existe pas dans $V_1(B(A, R))$ 3 sommets de degré 3 dont les voisinages sont 2 à 2 différents. Le fait que la propriété reste vraie pour tout V_1 -simplifié de $B(A, R)$ permet de conclure. $\square$

Mais l'ensemble des instances arbre-représentables n'est pas non plus inclus dans celui des instances grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne :

Proposition 12 *Il existe des instance de $\min DGB$ qui ne sont pas grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne mais arbre-représentables, l'arbre pouvant éventuellement être binaire.*

Preuve Soit H une instance de $\min DGB$ avec $V_1(H) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $V_2(H) = \{\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 3, 4\}\}$. Pour tout sommet $x \in V_1(H)$ et $y \in V_2(H)$, $\{x, y\}$ est une arête de H ssi $x \in y$ (voir figure 6).

H est arbre-représentable. Soit $I' = (A, R_A)$ une instance de $\min CRAS$ où A est un arbre d'ordre 6 : 4 feuilles et 2 nœuds internes de degré 3. Appelons e_i pour $i \in [1, 5]$ les arêtes de A . L'une des extrémités de e_3 est incidente aux arêtes e_1 et e_2 , l'autre extrémité de e_3 est incidente aux arêtes e_4 et e_5 (voir figure 6). Pour tout $y \in V_2(H)$, la chaîne dont l'ensemble des arêtes est $\{e_i | i \in y\}$ est une chaîne de R_A et R_A n'en possède pas d'autre. On peut facilement vérifier que le biparti associé à I' est H , qui est un arbre binaire.

H n'est pas grille-représentable avec des chaînes ligne-colonne. Soit $I'' = (G, R_G)$ une instance de $\min CRAS$ où G est une grille et R_G un routage de chaîne ligne-colonne. Si I'' est une graphe-représentation

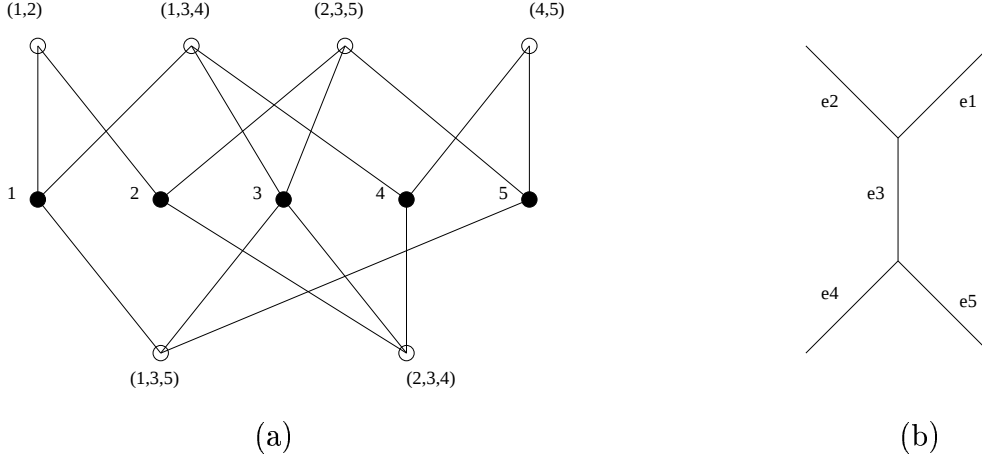


FIG. 6 – (a) Une instance H de $\min DGB$. (b) H peut être représenté sur cet arbre : les chaînes sont toutes les chaînes possibles entre les feuilles de cet arbre.

de H alors il existe 5 arêtes e_i de G , avec $i \in [1, 5]$, et 6 chaînes P_j de R_G , avec $j \in [1, 6]$, telles que :

1. $\{e_1, e_2\} \subseteq E(P_1)$ et $\{e_3, e_4, e_5\} \cap E(P_1) \neq \emptyset$
2. $\{e_4, e_5\} \subseteq E(P_2)$ et $\{e_3, e_1, e_2\} \cap E(P_2) \neq \emptyset$
3. $\{e_1, e_3, e_4\} \subseteq E(P_3)$ et $\{e_2, e_5\} \cap E(P_3) \neq \emptyset$
4. $\{e_1, e_3, e_5\} \subseteq E(P_4)$ et $\{e_2, e_4\} \cap E(P_4) \neq \emptyset$
5. $\{e_2, e_3, e_4\} \subseteq E(P_5)$ et $\{e_1, e_5\} \cap E(P_5) \neq \emptyset$
6. $\{e_2, e_3, e_5\} \subseteq E(P_6)$ et $\{e_1, e_4\} \cap E(P_6) \neq \emptyset$

- (a) Compte tenu de 1., 3. et 5., respectivement 2., 5. et 6., on a la propriété que, pour chaque choix d'une arête dans l'ensemble $\{e_1, e_2, e_3\}$, respectivement $\{e_4, e_5, e_3\}$, R_G possède une chaîne qui ne contient pas l'arête choisie mais qui contient les deux autres.

On en conclut que e_1, e_2 et e_3 , respectivement e_4, e_5 et e_3 , ne peuvent pas être alignées.

- (b) Supposons que e_1 et e_3 soient alignées. Alors e_2 leur est orthogonale et, de plus, sa rangée (i.e. sa ligne ou sa colonne suivant que l'arête est ligne ou colonne) sépare e_1 et e_3 (à cause de (a)).

Si e_4 est orthogonale à e_1 et e_3 , alors e_4 , qui est donc parallèle à e_2 , est alignée avec e_2 (à cause de 5.), ce qui ne se peut (à cause de 3., puisque e_2 sépare e_1 et e_3). Donc e_4 est alignée avec e_1 et e_3 (à cause de 3.) et, par symétrie, e_5 est également alignée avec e_1 et e_3 , ce qui contredit (a).

Donc e_1 et e_3 ne sont pas alignées et, par symétrie, e_2 et e_3 non plus. Il découle alors de (a) que e_3 est orthogonale à e_1 et e_2 et que sa rangée les sépare.

- (c) Par symétrie, e_3 est orthogonale à e_4 et e_5 et sa rangée les sépare. Donc e_1, e_2, e_4 et e_5 sont alignées (à cause de 5.), mais le fait que e_3 sépare d'une part e_2 et e_3 , d'autre part e_4 et e_5 , contredit alors 1. et 2..
- (d) Ce qui permet de conclure.

□

Notons qu'évidemment il existe des instances de *minDGB* qui ne sont ni arbre-représentables ni grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne (d'une même classe ou pas) puisque le problème *minDGB* est connu pour être non-APX.

5 À propos du cas orienté

Soit (G, R) une instance du problème *minCROAS*. On note $B(G, R)$ le graphe biparti pour lequel $V_1 = E(G)$, $V_2 = R$ et tel qu'un arc $e \in E(G)$ est adjacent dans $B(G, R)$ à un chemin $C \in R$ si et seulement si e est un arc de C . Comme dans le cas non orienté, on constate que (G, R, h) est une instance positive du problème *CRAS* si et seulement si $(B(G, R), h)$ est une instance positive du problème *DGB*, et on définit comme **CROAS-représentable** toute instance H du problème *minDGB* pour laquelle il existe une instance (G, R) du problème *minCROAS* telle que H soit isomorphe à un V_1 -simplifié de $B(G, R)$. Une telle instance (G, R) sera appelée une **CROAS-représentation** de H .

En définissant les **grilles orientées** comme les graphes obtenus à partir des grilles par le remplacement de chaque arête par deux arcs opposés (on obtient donc un graphe orienté symétrique), le théorème 1 s'étend alors sous la forme :

Théorème 10 *Tout graphe biparti H est grille-orientée-représentable avec des chemins de type plus courts chemins, et on sait calculer une telle représentation en un temps polynomial en fonction de $|V_2(H)|$. De plus, s'il existe un algorithme offrant une garantie de performance dans un rapport de $\rho(|V_2(H)|)$ pour toute instance H du problème *minDGB*, alors il en existe un offrant une garantie de performance dans un rapport de $\rho(|R|)$ pour toute instance (G, R) du problème *minCROAS*, et réciproquement.*

Preuve Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 1 en «orientant» dans le sens croissant des numéros de lignes et de colonnes les arêtes de chaque chaîne P_y pour en faire des chemins. □

Ce qui, comme dans le cas non orienté, renseigne immédiatement sur la complexité du problème *minCROAS* :

Théorème 11 *Le problème *minCROAS*, même restreint aux plus courts chemins dans les grilles orientées, est NP-difficile et non-APX. Il est approximable avec un facteur d'approximation de $1 + \ln |R|$.*

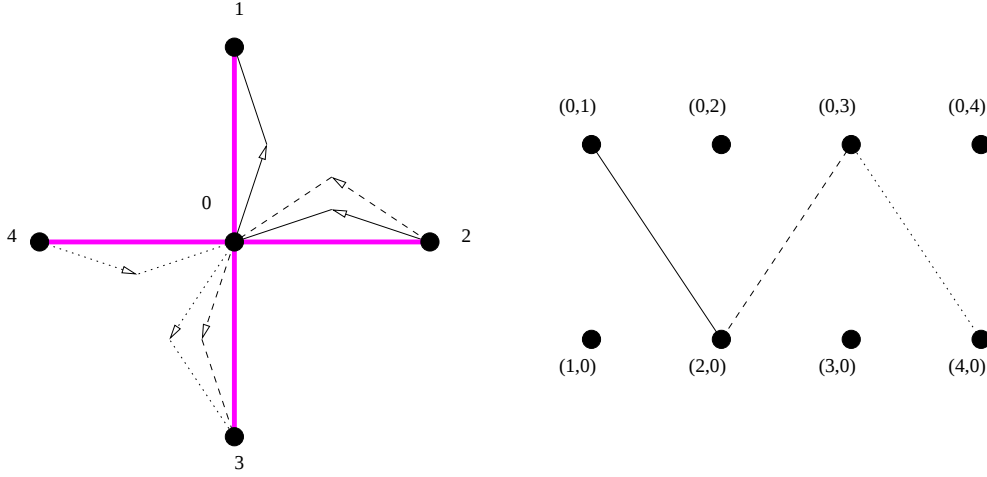


FIG. 7 – (a) Une instance (G, R) de CRAS où G est une étoile à 5 sommets et R un ensemble de 3 chemins. (b) Le biparti $B = (X, Y, E)$ possède 3 arêtes. L'arête $\{(2, 0), (0, 1)\}$ représente le chemin de R qui passe, dans l'ordre, par les sommets 2, 0 et 1 de l'étoile. L'arête $\{(2, 0), (0, 3)\}$ représente le chemin qui passe par les sommets 2, 0 et 3. Enfin, l'arête $\{(4, 0), (0, 3)\}$ représente le chemin de R qui passe par les sommets 4, 0 et 3.

Mais les résultats ne glissent pas tous à l'identique du cas non orienté au cas orienté, comme l'illustre le résultat suivant.

Théorème 12 *Le problème CROAS restreint aux étoiles orientées est dans P .*

Preuve Soit $I = (G, R, h)$ une instance du problème CROAS où G est une étoile orientée de sommets $0, 1, \dots, n-1$ et de centre 0.

Nous construisons le biparti non orienté $B = (X, Y, E)$ où X est le sous-ensemble des arcs de G dont l'origine est un sommet de l'intervalle $[1, n]$ et Y le sous ensemble d'arcs de G dont l'origine est 0. Il existe une arête entre un sommet x de X et y de Y si et seulement s'il existe dans R un chemin constitué des deux arcs x et y (cf. figure 7).

On vérifie alors que tout contrôle F de R dans G induit dans B une couverture Z des arêtes par des sommets avec $|F| = |Z|$. Réciproquement, toute couverture des arêtes par des sommets dans B induit un contrôle de R dans G de même cardinalité. Le fait que le problème de *Couverture des arêtes par des sommets* restreint aux graphes bipartis soit notoirement polynomial¹⁸, permet de conclure. $\square$

¹⁸Il est équivalent, dans les graphes bipartis, au calcul d'un couplage de cardinal maximum (théorème de König-Egerváry). Voir par exemple [CR04].

6 Conclusion

Le problème *minCRAS* est NP-difficile et non-APX dans le cas général, et il reste non-APX si on le restreint aux grilles avec des plus courtes chaînes.

Une démarche gloutonne a été mise en œuvre par l'algorithme *AminDGB* qui peut, selon les restrictions de données imposées en entrée, conduire à des résultats avec garantie de performance, voire à des résultats exacts. Ainsi il a été prouvé que restreint aux grilles avec des chaînes de type ligne-colonne de même classe, le problème *minCRAS* devient 2-approximable, ce qui permet de conclure immédiatement que ce même problème restreint aux grilles avec des chaînes de type ligne-colonne est APX. On a, par ailleurs, retrouvé la même approximation dans le cas des arbres (rappelons qu'il n'y a pas a priori de transformation «évidente» des instances dans les grilles avec des chaînes de type ligne-colonne en des instances dans les arbres, ni inversement). Enfin, appliqué aux chaînes, l'algorithme *AminDGB* donne le résultat exact et permet de le donner pour les cycles.

Dans le cas des étoiles, l'équivalence avec le problème de la *Couverture des arêtes d'un graphe par des sommets*¹⁹ préserve les facteurs d'approximation. Ainsi, améliorer notre approximation dans les arbres améliorerait du même coup l'approximation pour le problème *Couverture des arêtes d'un graphe par des sommets*, problème largement étudié et pour lequel 2 est apparemment le meilleur rapport d'approximation constant connu. On notera cependant que la réciproque n'est pas «naturellement» assurée, ce qui invite à étudier plus avant les possibilités de l'algorithme *AminDGB*.

Enfin, le problème *minCROAS*, une extension directe du problème *minCRAS* au cas orienté, est également NP-difficile et non-APX dans le cas général, et il reste non-APX si on le restreint aux grilles orientées avec des plus courts chemins.

Cependant, le résultat obtenu pour les étoiles orientées, pour lesquelles le problème *minCROAS* est polynomial alors que le problème *minCRAS* dans les étoiles est équivalent au célèbre problème de couverture des arêtes par des sommets (en anglais VERTEX COVER), invite à poursuivre l'étude du problème du contrôle dans les graphes orientés.

Références

- [ACG⁺03] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela, and M. Protasi. *Complexity and Approximation*. Springer, 2003.
- [Bag05] G. Bagan. Sur quelques variations autour du problème du transversal minimum. Master's thesis, Université Montpellier 2, 2005. DEA d'Informatique.

¹⁹Voir par exemple MINIMUM VERTEX-COVER dans [ACG⁺03]

- [BBG⁺97] B. Beauquier, J-C. Bermond, L. Gargano, P. Hell, S. Pérennes, and U. Vaccaro. Graph problems arising from wavelength-routing in all-optical networks. In IEEE Press, editor, *Proc. of IPPS'97, 2nd Workshop on Optics and Computer Science (WOCS'97)*, Genève, apr 1997.
- [Bea00] Bruno Beauquier. *Communications dans les réseaux optiques par multiplexage en longueur d'onde*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, jan 2000.
- [CFGL05] Claude Chaudet, Éric Fleury, and Isabelle Guérin Lassous. Positionnement optimal de sondes pour la surveillance active et passive de réseaux. Colloque Francophone sur l'Ingénierie des Protocoles 2005 (CFIP), Bordeaux, mars 2005.
- [Chi97] Thierry Chich. *Optimisation du routage par déflexion dans les réseaux de télécommunications métropolitains*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, dec 1997.
- [CR04] Olivier Cogis and Claudine Robert. *Théorie des Graphes*. Vuibert, 2004.
- [GJ85] Martin Charles Golumbic and Robert E. Jamison. The edge intersection graphs of paths in a tree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 38 :8–22, 1985.
- [GVY96] N. Garg, V. Vazirani, and M. Yannakakis. Approximate max-flow min-(multi)cut theorems and their applications. *SIAM Journal on Computing*, 25(2) :235–251, 1996.
- [Kea90] Michael Kearns. *The Computational Complexity of Machines Learning*. MIT Press, Cambridge MA, 1990.
- [KT03] Mustapha Kchikech and Olivier Togni. Paths coloring algorithms in mesh networks. In Cristian Calude, Michael J. Dinneen, and Vincent Vajnovszki, editors, *DMTCS*, pages 193–202. Springer-Verlag GmbH, 2003. Lecture Notes in Computer Science (volume 2731).
- [MN98] J. Matoušek and J. Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. Carendon Press, 1998. p. 56.
- [NT04] Hung X. Nguyen and Patrick Thiran. proceedings of active measurement for multiple link failures diagnosis in ip networks (pam2004). In *Passive and Active Measurement Workshop*, Antibes - Juan-lès-Pins, France, Avril 2004. Springer-Verlag. Lecture Notes of Computer Science (volume 3015).
- [SSV97] Heiko Schröder, Ondrej Sýkora, and Imrich Vrt'o. Optical all-to-all communication for some product graphs. In *Proceedings of the 24th Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, 1997.