N° d'ordre : 65-2004 Année 2004

THÈSE

présentée devant

l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT
(arrêté du 25 avril 2002)

présentée et soutenue publiquement le 25/06/2004 par

David HÉZARD

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

Sur le support unipotent des faisceaux-caractères

Au vu des rapports de :

M. Gunter MALLE
M. Jean MICHEL

Devant la commission d'examen formée de :

M. Fokko du CLOUX
M. Meinolf GECK, Directeur de thèse
M. Gunter MALLE
M. Jean MICHEL

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer à Meinolf Geck ma profonde reconnaissance pour avoir dirigé mes travaux. Travailler sous sa direction aura été pour moi une expérience très riche mathématiquement et humainement. Je le remercie pour sa disponibilité, ses encouragements ainsi que son écoute tant au niveau de mes recherches que de mes projets futurs.

Je tiens ensuite à remercier Gunter Malle et Jean Michel pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'être rapporteurs et membres du jury. Je suis également très reconnaissant à Fokko du Cloux d'avoir accepté de participer au jury. Je suis extrêmement flatté de voir toutes ces personnes rassemblées autour de mon travail.

Je voudrais aussi remercier tous les membres de l'Institut Girard Desargues, en particulier mes collègues de bureau qui ont joué un rôle important au cours de ces trois années : Fabrizio Caselli, Nicolas Jacon, Chadi Nour, Christophe de Monval et Séverine Verneyre. Je tiens aussi à saluer les doctorants de l'Institut Girard Desargues que j'ai été amené à cotoyer durant mes travaux notamment, parmi d'autres, Olivier Brunat, Ammar Mahmood, Sébastien Foulle et Jean-Baptiste Gramain.

Je tenais à remercier mes parents et mon frère, Julien, qui m'ont permis, de par leur soutien et leur affection, d'arriver jusqu'ici.

Je remercie aussi Ludovic et Séverine, Benjamin et Catherine, Loïc, Laurent, Nicolas et tous les autres pour leur amitié et leur bonne humeur permanente.

Enfin, je pense surtout à mon épouse Marion qui m'a toujours encouragé, parfois avec beaucoup d'humour, soutenu et supporté. Sa joie de vivre est pour beaucoup dans l'achèvement de cette thèse et je l'en remercie énormément.

Introduction

Ce travail porte sur la théorie des représentations ordinaires, c'est-à-dire sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, des groupes de Lie finis ou des groupes réductifs finis. Les exemples typiques sont les groupes linéaires, unitaires, orthogonaux ou symplectiques sur un corps fini. La richesse de ce domaine découle du fait que l'on sort rapidement du cadre des groupes finis pour utiliser des outils de géométrie algébrique. Effectivement, la démarche consiste à travailler au niveau des groupes algébriques (définis sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$) et donc de disposer de tout un arsenal de méthodes algébriques et géométriques puis d'en déduire des résultats au niveau des groupes finis. C'est le point de vue dans les travaux de référence sur ce sujet, en particulier, le livre de G. Lusztig [20].

Nous allons maintenant expliquer les principaux résultats de ce travail. On supposera que le lecteur a une certaine familiarité avec la théorie des groupes algébriques. Pour la plupart des notions élémentaires, on pourra se reporter aux livres de R. W. Carter [3] et M. Geck [11].

Soit donc G un groupe connexe réductif défini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ où q est une puissance d'un nombre premier p. Alors $G^F = \{g \in G \mid F(g) = g\}$ est un groupe fini où $F : G \longrightarrow G$ est l'endomorphisme de Frobenius associé à la structure $\mathbb{F}_q$-rationnelle de G. Le problème initial est d'établir la table des caractères ordinaires de G^F. D'après les travaux de G. Lusztig [20], [24], on a une classification des caractères irréductibles, on connaît leurs dimensions, leurs valeurs sur les éléments semisimples et beaucoup d'autres choses. Dans ce contexte, un des problèmes les plus difficiles (et encore restant ouvert) est la détermination des valeurs sur les éléments unipotents de G^F. Par la suite, G. Lusztig [22] a développé la théorie des *faisceaux-caractères* qui fournit un cadre dans lequel on peut attaquer le problème de calculer toutes les valeurs des caractères. De façon générale, la thèse est concernée par les restrictions des caractères et des faisceaux-caractères aux éléments unipotents.

Dans le cadre de la théorie développée par G. Lusztig, on peut associer à chaque caractère (ou à chaque faisceau-caractère) une classe unipotente de G : le support unipotent. D'une manière informelle, c'est l'unique classe unipotente de dimension maximale où le caractère (ou le faisceau-caractère) en question est non nul. Plus précisément, le but de la thèse est donc d'étudier la restriction d'un caractère (ou d'un faisceau-caractère) à son support unipotent.

On aura encore besoin de quelques notations. Par la suite, on supposera que le centre de G est connexe et que p est "assez grand". Soit $\hat{G}$ l'ensemble des faisceaux-caractères sur G. Ce sont donc certains complexes (à quasi-isomorphisme près) de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux constructibles G-équivariants sur G (où ℓ est un nombre premier, $\ell \neq p$). G. Lusztig [22] a donné une paramétrisation de $\hat{G}$ qui ressemble à la paramétrisation des caractères irréductibles donnée dans son livre [20]. Tout d'abord, on a une partition naturelle

$$\hat{G} = \coprod_C \hat{G}_C \quad \text{avec} \quad |\hat{G}_C| < \infty,$$

où C parcourt l'ensemble des classes dites "spéciales" dans le groupe dual G^* de G. La définition des classes "spéciales" implique, entre autres, la correspondance de Springer. Ensuite, fixons une classe spéciale C de G^*. Alors G. Lusztig a associé à C un certain groupe fini $\mathcal{G}_C$ tel que l'on a une bijection

$$\hat{G}_C \longleftrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{G}_C)$$

où $\mathcal{M}(\mathcal{G}_C)$ est l'ensemble de toutes les paires (x, σ) où x est un élément de $\mathcal{G}_C$, modulo conjugaison, et σ est un caractère irréductible du centralisateur de x dans $\mathcal{G}_C$.

Dans le cadre de cette paramétrisation, on peut maintenant donner une définition précise du support unipotent. Étant donnée une classe spéciale C dans G^*, il existe une unique classe unipotente $O = O(C)$ dans G avec les propriétés suivantes :

(a) Il existe un $A \in \hat{G}_C$ tel que $A|_O \neq 0$.

(b) Soit $A \in \hat{G}_C$ et O' une classe unipotente de G telle que $A|_{O'} \neq 0$. Alors on a $\dim O' < \dim O$ ou $O' = O$.

On pourra trouver cela dans [25, théorème 10.7], et aussi dans les remarques dans [9, paragraphe 4.3].

On dira que O est le *support unipotent* des faisceaux-caractères de $\hat{G}_C$. Ainsi, on obtient une application

$$\Phi_G \,:\, \{C \mid C \text{ classe spéciale dans } G^*\} \longrightarrow \{O \mid O \text{ classe unipotente dans } G\}$$

On dira qu'une classe C de G^* est *isolée* si le centralisateur de la partie semisimple d'un élément dans C n'est pas contenu dans un sous groupe de Levi d'un sous groupe parabolique propre de G^*. Cette définition apparaît dans [21, paragraphe 2.6].

Maintenant on a tous les ingrédients pour formuler les résultats suivants :

Théorème A *Soit G un groupe connexe réductif de centre $Z(G)$ connexe. Supposons que $G/Z(G)$ soit simple et que la caractéristique avec laquelle on travaille soit bonne pour G. Soit C une classe isolée et spéciale de G^* et $O = \Phi_G(C)$ le support unipotent des faisceaux-caractères dans $\hat{G}_C$. On suppose que*

$$\mathcal{G}_C \simeq C_G(u)/C_G(u)^\circ \qquad \textit{où } u \in O. \tag{$*$}$$

Soit $X_C = \{A \in \hat{G}_C,\ A|_O \neq 0\}$. Alors l'application $A \longmapsto A|_O$ définit une bijection entre X_C et l'ensemble des systèmes locaux irréductibles et G-équivariants sur O.

Un résultat de ce type a été énoncé par G. Lusztig [23, paragraphe 1.6], mais sans tenir compte de l'hypothèse $(*)$. Le fait qu'il faut ajouter cette hypothèse a été formulée explicitement par M. Geck [9], suivant une suggestion de G. Lusztig. Dans [23], G. Lusztig donne une preuve du théorème A pour un groupe G de type B_n (dans ce cas, la conclusion du théorème est vraie sans l'hypothèse $(*)$). D'après M. Geck [9], la démonstration du théorème se réduit à la démonstration de certaines propriétés de la correspondance de Springer. Nous allons donc établir ces propriétés, en utilisant la connaissance explicite de la correspondance de Springer pour tous les groupes réductifs connexes.

Ensuite, nous montrons le résultat suivant qui sera important pour les applications aux groupes réductifs finis.

Théorème B *Soit G un groupe connexe réductif de centre $Z(G)$ connexe. Supposons que $G/Z(G)$ soit simple et que la caractéristique avec laquelle on travaille soit bonne pour G. Supposons que $G/Z(G)$ soit simple. Soit O une classe unipotente de G. Alors il existe une classe spéciale et isolée C dans G^* telle que $O = \Phi_G(C)$ et telle que l'hypothèse $(*)$ soit satisfaite. En plus, si O est F-stable, alors C peut être choisie F-stable également.*

Comme application, on va pouvoir démontrer une conjecture de Kawanaka concernant les caractères de Gelfand-Graev généralisés de G^F. A chaque classe unipotente du groupe fini G^F, N. Kawanaka [16] associe un certain caractère, que l'on appelle caractère de Gelfand-Graev généralisé, qui est induit d'un caractère irréductible d'un certain sous groupe unipotent de G^F. Par définition, les caractères de Gelfand-Graev généralisés ont des valeurs non nulles seulement sur les éléments unipotents de G^F. D'après les travaux de N. Kawanaka [17] et G. Lusztig [25], on sait que ces caractères sont intimement liés à la géométrie de la variété unipotente de G. Ici, on montre le résultat suivant :

Théorème C (conjecture de Kawanaka [17]) *Soit G un groupe connexe réductif de centre $Z(G)$ connexe défini sur $\mathbb{F}_q$ avec $q = p^n$. Supposons que la caractéristique p et q soient suffisamment grands. Alors les caractères de Gelfand-Graev généralisés forment une base du $\mathbb{Z}$-module des caractères généralisés de G^F à support unipotent.*

Le principal point de départ de ce travail est l'article [9] de M. Geck où on trouve une stratégie pour la démonstration du théorème A. Cette stratégie implique l'introduction d'un certain invariant des caractères irréductibles d'un groupe de Weyl fini. D'après les travaux de G. Lusztig [18] et [20], on connaît déjà les "a-invariants" (définis en utilisant les degrés génériques des algèbres de Hecke associées) et les "b-invariants" (définis en utilisant la théorie classique des invariants des groupes finis). Ici, on va étudier les "d-invariants" introduits par M. Geck [9] ; leur définition s'appuie sur la correspondance de Springer et donc les d-invariants ne dépendent pas seulement du groupe de Weyl mais du système de racines.

Dans le chapitre 1, on donne la définition de ces d-invariants, on les explicite pour tous les groupes de Weyl finis, et on explique la relation avec les a-invariants et les b-invariants. En particulier, pour les types classiques A_n, B_n, C_n et D_n, on obtient des formules explicites et combinatoires en utilisant les symboles de G. Lusztig [21]. Pour les types exceptionnels G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8, on fournit des tables explicites avec les d-invariants.

Le chapitre 2 est de nature préparatoire. Il contient des résultats sur l'induction des caractères dans les groupes de Weyl et la compatibilité avec les d-invariants. Ces résultats entrent dans la démonstration du théorème A.

Dans le chapitre 3, nous nous proposons de démontrer le théorème A. Comme on l'a déjà mentionné, d'après M. Geck [9], la démonstration se réduit à la démonstration d'une propriété de la correspondance de Springer, impliquant le d-invariant des caractères des groupes de Weyl et l'induction des caractères. On établit ces propriétés en utilisant les résultats combinatoires du chapitre 2 et des calculs explicites en `CHEVIE` [12] sous `GAP` pour les groupes exceptionnels.

Les chapitres 4 et 5 sont concernés par la démonstration du théorème B. En utilisant la classification des classes unipotentes, nous pouvons décrire explicitement, pour toute classe unipotente O de G, une classe spéciale et isolée C dans G^* telle que $O = \Phi_G(C)$ et telle que l'hypothèse $(*)$ soit satisfaite. Ensuite nous vérifions que, si O est F-stable, alors la classe C proposée l'est aussi.

Enfin, le chapitre 6 contient les applications aux groupes réductifs finis, notamment le théorème C. Pour cela, on utilise aussi les résultats de T. Shoji [30] et [31] qui expriment les caractères irréductibles de G^F explicitement comme combinaisons linéaires des fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères F-stables sur G.

Table des matières

Chapitre 1

Divers invariants d'un caractère d'un groupe de Weyl

Sommaire

L'objectif de ce chapitre est d'introduire et d'étudier différents invariants pour un caractère irréductible d'un groupe de Weyl. Les définitions de ces invariants nécessitent un cadre plus large que celui des groupes de Weyl, par exemple, il nous faut parler des algèbres de Hecke et des groupes algébriques. Le but de ce chapitre est de donner des formules explicites et combinatoires de ces divers invariants.

1.1 Introduction

Soit W un groupe de Weyl . On s'intéresse à plusieurs invariants qui peuvent être associés aux caractères irréductibles de W. On notera $\mathrm{Irr}(W)$ l'ensemble des caractères irréductibles de W. Dans la théorie de G. Lusztig [20, chapitre 4], il est déjà introduit deux invariants : le a-invariant, défini en utilisant les degrés génériques des algèbres de Hecke correspondantes, et le b-invariant, défini en utilisant les puissances symétriques de la représentation naturelle de W. Ainsi, pour tout $E \in \mathrm{Irr}(W)$, on dispose de deux entiers $a(E)$ et $b(E)$. On pourra aussi se reporter à [14, paragraphe 6.5].

G. Lusztig a observé que l'on a toujours $a(E) \leq b(E)$. Lorsque l'on a l'égalité, on dira que E est une représentation spéciale ([20, chapitre 4] et [3, chapitre 11]).

D'après [20, chapitre 4], on peut partitionner $\mathrm{Irr}(W)$ en familles et l'on peut, à chaque famille $\mathcal{F}$, associer un groupe fini $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. Il s'agit d'un autre invariant que l'on peut associer à $E \in \mathcal{F} \subset \mathrm{Irr}(W)$.

Jusqu'à présent, les invariants introduits appartiennent à la théorie des groupes de Weyl et des algèbres de Hecke dans le cas de a, maintenant nous allons présenter deux autres invariants pour un caractère irréductible de W qui appartiennent à la théorie des groupes algébriques. Ceci introduit en particulier une différence entre le type B_n et C_n que nous n'avions pas jusqu'à présent. La liaison entre groupe de Weyl et groupe algébrique nous permettant de définir ces deux nouveaux invariants est la correspondance de Springer.

Soit G un groupe réductif connexe de centre $Z(G)$ connexe. On suppose aussi que la caractéristique avec laquelle on travaille est bonne pour G, c'est-à-dire qu'elle est bonne pour tous les facteurs simples de G, ce qui se résume par :

$$\begin{aligned} A_n &: \text{ pas de condition},\\ B_n,\ C_n,\ D_n &: p \neq 2,\\ G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7 &: p \neq 2,3,\\ E_8 &: p \neq 2,3,5. \end{aligned}$$

Soient T un tore maximal fixé de G et $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl de G. La correspondance de Springer associe à chaque $E \in \mathrm{Irr}(W)$ une paire (O, ψ) où O est une classe unipotente de G et ψ un caractère irréductible du groupe fini $A(u) = C_G(u)/C_G(u)^\circ$ avec $u \in O$. Ceci nous permet d'introduire deux nouveaux invariants pour E, le groupe fini $A(u)$ et $d(E) = \dim \mathcal{B}_u$ où $\mathcal{B}_u$ est la variété projective des sous groupes de Borel de G contenant u.

Notons un premier résultat situant les invariants a, d et b.

Proposition 1.1 *Soit $E \in \mathrm{Irr}(W)$. Alors on a $a(E) \leq d(E) \leq b(E)$.*

Voir [25, corollaire 10.9] pour la première inégalité et [33, paragraphe 1.1] pour la seconde.

Dans ce travail, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux invariants a, b, $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, $A(u)$ et d d'un caractère $E \in \mathrm{Irr}(W)$ avec $\mathcal{F}$ et u définis comme précédemment. Nous souhaitons donner, dans ce chapitre, des formules explicites et combinatoires de ces invariants, formules qui seront utilisées par la suite.

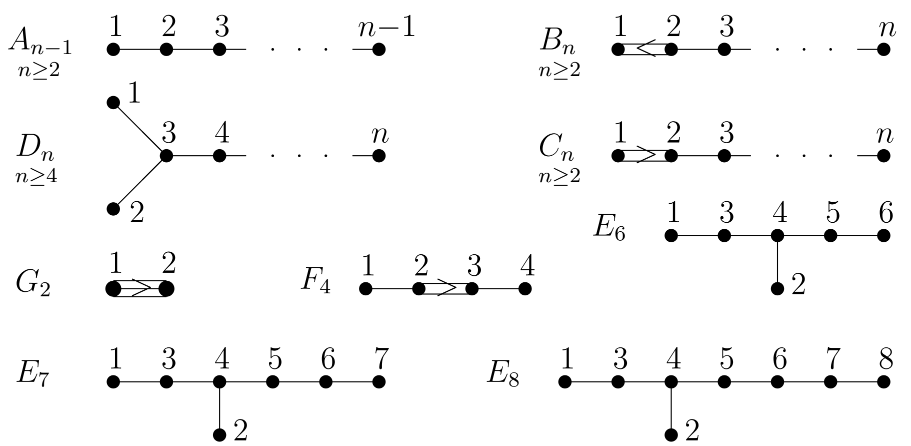
Toutes les données introduites ci-dessus sont explicitement connues : le a-invariant, le b-invariant, le groupe $A(u)$, le groupe $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ et la correspondance de Springer. A partir de là, nous allons exploiter tout cela de façon combinatoire afin d'obtenir des formules. Pour ce faire, nous allons utiliser les symboles, introduits par G. Lusztig. Pour avoir des informations générales concernant les caractères des groupes de Weyl finis, on pourra se reporter à [14].

Pour l'étude de ces invariants, on va se limiter aux cas où $G/Z(G)$ est simple à l'aide de la remarque suivante :

Remarque 1.2 Si G est le produit de groupes algébriques irréductibles $G_1 \times \cdots \times G_k$ alors W est le produit des groupes de Weyl $W_1 \times \cdots \times W_k$. On a alors qu'une représentation irréductible E de W est le produit de représentations irréductibles des W_i : $E = E_1 \boxtimes \cdots \boxtimes E_k$ où E_i est une représentation irréductible de W_i et une famille $\mathcal{F}$ de représentations irréductibles de W est le produit de familles $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_k$ de représentations irréductibles de $W_1,\ldots,W_k$ et $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}_1} \times \cdots \times \mathcal{G}_{\mathcal{F}_k}$. On a $b(E) = \sum b(E_i)$, $a(E) = \sum a(E_i)$ et E est une représentation spéciale si et seulement si toutes les E_i sont des représentations spéciales. Si O est une classe unipotente de G, $O = O_1 \times \cdots \times O_k$ avec O_i classe unipotente de G_i, $\dim \mathcal{B}_u = \sum \dim \mathcal{B}_{u_i}$ et $A(u) = A(u_1) \times \cdots \times A(u_k)$ si $u = (u_1, \ldots, u_k)$ et la correspondance de Springer est triviale vis-à-vis du produit, c'est-à-dire composante par composante.

Ainsi, dans toute la suite, G sera un groupe réductif connexe tel que $G/Z(G)$ est simple. Nous présentons donc les diagrammes de Dynkin des groupes algébriques simples.

Table 1.3 Diagrammes de Dynkin



La numérotation des sommets correspond à celle de `CHEVIE` [12]. Dans tout ce travail, nous utiliserons toujours ces numérotations des sommets.

Enfin, hormis dans le paragraphe 1.8 où nous nous intéresserons aux groupes exceptionnels, nous supposerons dans tout ce chapitre que G est un groupe classique.

Notons à nouveau que tous les groupes algébriques considérés dans ce chapitre sont de centre connexe. Alors, comme cela est exprimé dans le corollaire 6.3, les groupes $A(u)$ sont identiques au cas où G est de type adjoint. Si le centre de G n'est pas connexe, les groupes $A(u)$ peuvent être changés [3, paragraphe 13.1].

1.2 Notations pour les partitions

Dans toute la suite, on appelle α partition de n toute suite finie d'entiers naturels $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_k)$ avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$. Notons que, dans cette définition, k n'est pas unique car on autorise le rajout de 0. D'un point de vue rigoureux, une partition de n est une classe d'équivalence de suites finies d'entiers naturels de somme n sous la relation "ajouter des 0".

On note, pour une telle partition, $|\alpha| = n$. Par ailleurs, on notera $\varnothing$ l'unique partition de 0.

Soient deux partitions $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_k)$ et $\lambda = (\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k)$ (quitte à rajouter des 0, on peut supposer qu'elles ont le même nombre de parts). On définit la somme de α et λ comme la partition de $|\alpha|+|\lambda|$, $\alpha+\lambda = (\alpha_1 + \lambda_1 \leq \cdots \leq \alpha_k + \lambda_k)$.

On munit l'ensemble des partitions de n de l'ordre partiel usuel (ordre de dominance) [26, paragraphe 1.9 du chapitre 1] : si $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_k)$ et $\beta = (\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_k)$ sont des partitions de n (quitte à rajouter des zéros, on peut supposer qu'elles ont même longueur), on dit que $\alpha \prec \beta$ si,

$$\sum_{i=j}^{k} \alpha_i \leq \sum_{i=j}^{k} \beta_i \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, k\}.$$

On définit, pour une partition $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_k)$, la fonction suivante [26, formule 1.5 du chapitre 1] :

$$n(\alpha) = \sum_{1 \leq j < i \leq k} \min(\alpha_i, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{k} (k-i)\alpha_i$$

On a alors les propriétés suivantes :

(a) n est additive : $n(\alpha + \beta) = n(\alpha) + n(\beta)$.

(b) n est strictement décroissante : $\alpha \prec \lambda$ implique $n(\lambda) \leq n(\alpha)$ avec égalité si et seulement si $\alpha = \lambda$.

Pour tout cela, on pourra se reporter à [14, chapitre 5] et [26, paragraphe 1 du chapitre 1].

1.3 G de type A_{n-1}

Soit G un groupe réductif connexe de type A_{n-1} de centre connexe. Soit W son groupe de Weyl.

W est donc isomorphe à $\mathfrak{S}_n$. Les représentations irréductibles de W sont paramétrées par les partitions de n. Par exemple, le caractère trivial correspond à la partition (n) et le caractère signe à la partition $(1\dots 1)$.

Par ailleurs, les classes unipotentes de G sont également paramétrées par les partitions de n.

Avec [20, paragraphe 4.4] et [3, paragraphe 13.1], on a les résultats suivants :

Proposition 1.4 *Avec les notations précédentes, soit E une représentation irréductible de W, paramétrée par $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_k)$, partition de n.*

(a) Alors E est spéciale et

$$a(E) = b(E) = d(E) = n(\alpha)$$

(b) Notant $\mathcal{F}$ la famille de $\mathrm{Irr}(W)$ contenant E, on a

$$\mathcal{F} = \{E\} \text{ et } \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \simeq \{1\}$$

(c) La classe unipotente associée à E via la correspondance de Springer est paramétrée par la partition α.

(d) Si u est un élément de la classe unipotente associée à E via la correspondance de Springer alors

$$A(u) \simeq \{1\}$$

Ceci termine le cas G de type A_{n-1}.

A partir de maintenant et jusqu'à mention explicite du contraire, nous supposerons que G est un groupe classique de type B_n, C_n ou D_n.

1.4 Symboles et combinatoire

L'objectif de cette section purement combinatoire est d'introduire formellement les symboles : ce sont des outils primordiaux pour notre sujet et notamment pour les formules des différents invariants.

1.4.1 Une relation d'équivalence

Avant de définir les symboles, introduisons une relation d'équivalence qui sera utilisée dans toute la suite de ce travail.

Définition 1.5 Soit Z un ensemble fini de naturels. On définit, sur Z, la relation d'équivalence suivante $\sim$: $a \sim b$ avec a, $b \in Z$ si et seulement si $a \leq b$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_i \in Z$, $0 \leq i \leq k$ avec $a_0 = a$, $a_i = a + i$ et $a_k = b$ ou si $b \leq a$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_i \in Z$, $0 \leq i \leq k$ avec $a_0 = b$, $a_i = b + i$ et $a_k = a$.

Exemple 1.6 Si $Z = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 13, 14, 15\}$ alors les classes d'équivalence sur Z de la relation $\sim$ sont : $\{0, 1\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{8\}$, $\{10\}$ et $\{13, 14, 15\}$

1.4.2 Symboles

Présentons maintenant les symboles, introduits par G. Lusztig, en reprenant la présentation de l'article [13] de M. Geck et G. Malle.

Soient n, r et s des entiers naturels et $e \in \{0, 1\}$. On pose $\overline{X}_{n,e}^{r,s}$ l'ensemble des paires ordonnées (A, B) de suites finies d'entiers $A = (a_1, \ldots, a_{m+e})$ et $B = (b_1, \ldots, b_m)$ avec

(a) $a_i - a_{i-1} \geq r + s$ pour $1 < i \leq m + e$,

(b) $b_i - b_{i-1} \geq r + s$ pour $1 < i \leq m$,

(c) $b_1 \geq s$,

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m+e} a_i + \sum_{i=1}^{m} b_i = n + rm(m + e - 1) + sm(m + e)$.

On notera (A, B) de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & & a_2 & & a_3 & & \ldots & & a_m & & a_{m+1} \\ & b_1 & & b_2 & & \ldots & & b_{m-1} & & b_m & \end{pmatrix} \qquad \text{si } e = 1$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{m-1} & a_m \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{m-1} & b_m \end{pmatrix} \qquad \text{si } e = 0$$

Il y a, sur $\overline{X}_{n,e}^{r,s}$, une opération de shift $\overline{X}_{n,e}^{r,s} \longrightarrow \overline{X}_{n,e}^{r,s}$ définie par

$$(A,B) \longmapsto ((0, a_1+r+s, \dots, a_{m+e}+r+s), (s, b_1+r+s, \dots, b_m+r+s))$$

On note le quotient de $\overline{X}^{r,s}_{n,e}$ par ce shift $X^{r,s}_{n,e}$ et les éléments de $X^{r,s}_{n,e}$ sont appelés symboles et seront notés par leurs représentants (A,B).

Remarque 1.7 Comme on ne travaillera toujours qu'avec un nombre fini de symboles, on pourra toujours choisir dans $\overline{X}^{r,s}_{n,e}$ modulo ce shift des représentants qui ont toujours la même longueur, c'est-à-dire avec toujours le même m. On choisit donc une fois pour toutes m très grand (par exemple, dans les cas G de type B_n, C_n et D_n, on peut prendre $m = 2n+1$) et donc on confondra, dans toute la suite, un symbole avec son représentant dont la seconde ligne est de longueur m.

L'ensemble $X^{r,s}_{0,e}$ consiste en un seul élément $\Lambda^{r,s}_{0,e}$: si $e = 0$ alors $\Lambda^{r,s}_{0,0} = (-,-)$; si $e = 1$ alors $\Lambda^{r,s}_{0,1} = ((0),-)$.

Il y a aussi une addition $X^{r,s}_{n,e} \times X^{r',s'}_{n',e} \longrightarrow X^{r+r',s+s'}_{n+n',e}$ définie comme l'addition composante par composante de représentants de même longueur.

Un élément $\Lambda = (A,B)$ est dit distingué si $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_m$ (et $b_m \leq a_{m+1}$ si $e = 1$) Le sous ensemble de $X^{r,s}_{n,e}$ des symboles distingués est noté $D^{r,s}_{n,e}$. Deux symboles sont dits semblables si les suites ordonnées des entrées de deux de leurs représentants coïncident. Ainsi, pour tout symbole $\Lambda \in X^{r,s}_{n,e}$, il existe un unique symbole $D(\Lambda)$ dans $D^{r,s}_{n,e}$ qui est semblable à Λ.

Finalement, si $s = 0$, on note $Y^r_{n,0}$ le quotient de $X^{r,0}_{n,0}$ par l'opération d'échange des deux lignes d'un symbole. Les symboles invariants par l'échange des deux lignes sont dits dégénérés et seront comptés deux fois. (A,B) est dit distingué si (A,B) ou (B,A) l'est au sens précédent, en particulier, tout symbole dégénéré est distingué. On écrit $Y^r_{n,1}$ pour $X^{r,0}_{n,1}$. On notera $D^r_{n,e}$ les éléments distingués de $Y^r_{n,e}$.

1.4.3 Applications

On définit maintenant diverses applications :

Définition 1.8 On définit ϕ_1 bijection de $X^{0,0}_{n,1} = Y^0_{n,1}$ dans $X^{1,0}_{n,1} = Y^1_{n,1}$ par $\phi_1[\alpha,\beta] = (\alpha,\beta) + \Lambda^{1,0}_{0,1}$.

Si $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_{m+1})$ et $\beta = (\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_m)$, alors $\phi_1[\alpha,\beta]$ vaut :

$$\phi_1[\alpha,\beta] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \alpha_2+1 & & \alpha_3+2 & & \dots & & \alpha_{m+1}+m \\ & \beta_1 & & \beta_2+1 & & \dots & & \beta_m+(m-1) & \end{pmatrix}$$

On définit ϕ_0 bijection de $Y^0_{n,0}$ dans $Y^1_{n,0}$ par $\phi_0[\alpha,\beta] = (\alpha,\beta) + \Lambda^{1,0}_{0,0}$.
Si $\alpha = (\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m)$ et $\beta = (\beta_1 \leq \dots \leq \beta_m)$, alors $\phi_0[\alpha,\beta]$ vaut :

$$\phi_0[\alpha,\beta] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2+1 & \alpha_3+2 & \dots & \alpha_m+(m-1) \\ \beta_1 & \beta_2+1 & \beta_3+2 & \dots & \beta_m+(m-1) \end{pmatrix}$$

Ces applications sont adaptées pour l'étude des caractères spéciaux et pour le calcul des invariants a, b et $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

Définition 1.9 On définit ψ_B bijection de $X^{0,0}_{n,1} = Y^0_{n,1}$ dans $X^{2,0}_{n,1} = Y^2_{n,1}$ par $\psi_B[\alpha,\beta] = (\alpha,\beta) + \Lambda^{2,0}_{0,1}$.
Si $\alpha = (\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{m+1})$ et $\beta = (\beta_1 \leq \dots \leq \beta_m)$, alors $\psi_B[\alpha,\beta]$ vaut :

$$\psi_B[\alpha,\beta] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \alpha_2+2 & & \alpha_3+4 & & \dots & & \alpha_{m+1}+2m \\ & \beta_1 & & \beta_2+2 & & \dots & & \beta_m+2(m-1) & \end{pmatrix}$$

On définit ψ_C bijection de $X^{0,0}_{n,1} = Y^0_{n,1}$ dans $X^{1,1}_{n,1}$ par $\psi_C[\alpha,\beta] = (\alpha,\beta) + \Lambda^{1,1}_{0,1}$.
Si $\alpha = (\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{m+1})$ et $\beta = (\beta_1 \leq \dots \leq \beta_m)$, alors $\psi_C[\alpha,\beta]$ vaut :

$$\psi_C[\alpha,\beta] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \alpha_2+2 & & \alpha_3+4 & & \dots & & \alpha_{m+1}+2m \\ & \beta_1+1 & & \beta_2+3 & & \dots & & \beta_m+2m-1 & \end{pmatrix}$$

On définit ψ_D bijection de $Y^0_{n,0}$ dans $Y^2_{n,0}$ par $\psi_D[\alpha,\beta] = (\alpha,\beta) + \Lambda^{2,0}_{0,0}$.
Si $\alpha = (\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m)$ et $\beta = (\beta_1 \leq \dots \leq \beta_m)$, alors $\psi_D[\alpha,\beta]$ vaut :

$$\psi_D[\alpha,\beta] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2+2 & \alpha_3+4 & \dots & \alpha_m+2(m-1) \\ \beta_1 & \beta_2+2 & \beta_3+4 & \dots & \beta_m+2(m-1) \end{pmatrix}$$

Ces applications sont adaptées pour l'étude explicite de la correspondance de Springer et donc pour le calcul des invariants d et $A(u)$.

1.4.4 Ordre partiel sur les symboles

Définition 1.10 Soient Λ et Λ' deux éléments de $X^{r,s}_{n,e}$. Soient (A,B) et (A',B') des représentants respectifs de Λ et Λ' avec B et B' de même longueur m.

On note $A = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{m+e})$, $A' = (a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_{m+e})$, $B = (b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_m)$ et $B' = (b'_1 \leq b'_2 \leq \cdots \leq b'_m)$

On dit que $\Lambda' \prec \Lambda$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- pour tout $j \in \{1, \ldots, m+e\}$, $\sum_{i=j}^{m+e} a'_i \leq \sum_{i=j}^{m+e} a_i$ et $\sum_{i=1}^{m+e} a'_i = \sum_{i=1}^{m+e} a_i$.
- pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\sum_{i=j}^{m} b'_i \leq \sum_{i=j}^{m} b_i$ et $\sum_{i=1}^{m} b'_i = \sum_{i=1}^{m} b_i$.

Remarque 1.11 Si α, β, λ et μ sont des partitions avec $\alpha \prec \lambda$ et $\beta \prec \mu$ (ce qui équivaut à $[\alpha, \beta] \prec [\lambda, \mu]$) alors $\phi_1[\alpha, \beta] \prec \phi_1[\lambda, \mu]$, $\phi_0[\alpha, \beta] \prec \phi_0[\lambda, \mu]$, $\psi_B[\alpha, \beta] \prec \psi_B[\lambda, \mu]$, $\psi_C[\alpha, \beta] \prec \psi_C[\lambda, \mu]$ et $\psi_D[\alpha, \beta] \prec \psi_D[\lambda, \mu]$.

1.5 G de type B_n

Soit G un groupe réductif connexe de type B_n de centre connexe. Soit W son groupe de Weyl.

On rappelle que les représentations irréductibles de W, groupe de Weyl irréductible, sont paramétrées par les paires de partitions $[\alpha, \beta]$ avec $|\alpha| + |\beta| = n$, paires ordonnées [27, paragraphe 1.1].

Par exemple, la représentation triviale est paramétrée par $[n, \varnothing]$ et la représentation signe par $[\varnothing, 1 \ldots 1]$.

Ainsi, comme on peut toujours rajouter des zéros à une partition, on a $\mathrm{Irr}(W) \simeq X^{0,0}_{n,1} = Y^0_{n,1}$.

1.5.1 Les invariants a_B, b_B et $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$

On rappelle ici plusieurs résultats de [3, paragraphe 11.4], [20, paragraphe 4.5] et [14].

Soit $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)$.

Le b-invariant est donné par la formule suivante :

$$b_B[\alpha, \beta] = 2n(\alpha) + 2n(\beta) + |\beta|$$

On associe à $[\alpha, \beta]$ le symbole $\phi_1[\alpha, \beta]$ qui vaut, si $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_{m+1})$ et $\beta = (\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_m)$,

$$\phi_1[\alpha,\beta]=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \alpha_2+1 & & \alpha_3+2 & & \dots & & \alpha_{m+1}+m\\ & \beta_1 & & \beta_2+1 & & \dots & & \beta_m+(m-1) & \end{pmatrix}$$

Le a-invariant est donné par la formule suivante

$$a_B[\alpha,\beta]=\sum_{\{c,c'\}}\min(c,c')-\frac{m(m-1)(4m+1)}{6}$$

où $\{c,c'\}$ décrit tous les ensembles à deux éléments de la suite des entrées de $\phi_1[\alpha,\beta]$.

On en déduit :

$$[\alpha,\beta]\text{ spécial }\Longleftrightarrow\phi_1[\alpha,\beta]\text{ distingué}$$

Par ailleurs, on peut associer à la famille $\mathcal{F}$ de représentations irréductibles de W contenant $[\alpha,\beta]$ le groupe fini $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. Notons $\mathcal{F}$ la famille de $\mathrm{Irr}(W)$ contenant $[\alpha,\beta]$. Alors, notant Z l'ensemble des entrées de $\phi_1[\alpha,\beta]$ n'apparaissant qu'une seule fois (c'est-à-dire dans une et une seule des deux lignes du symbole), on a

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}\simeq{\mathfrak{S}_2}^{f_B[\alpha,\beta]}\text{ avec }f_B[\alpha,\beta]=\frac{|Z|-1}{2}.$$

1.5.2 Les invariants d_B et $A(u)$

On rappelle que G est un groupe réductif connexe de centre connexe de type B_n.

Tout d'abord, pour $[\alpha,\beta]\in\mathrm{Irr}(W)$, on associe à $[\alpha,\beta]$ le symbole $\psi_B[\alpha,\beta]$ qui vaut, si $\alpha=(\alpha_1\leq\cdots\leq\alpha_{m+1})$ et $\beta=(\beta_1\leq\cdots\leq\beta_m)$,

$$\psi_B[\alpha,\beta]=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \alpha_2+2 & & \alpha_3+4 & & \dots & & \alpha_{m+1}+2m\\ & \beta_1 & & \beta_2+2 & & \dots & & \beta_m+2(m-1) & \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $Y^2_{n,1}=\{\psi_B[\alpha,\beta],\ [\alpha,\beta]\in\mathrm{Irr}(W)\}$.

Les classes unipotentes X_G de G sont paramétrées par les partitions de $2n+1$ telles que le nombre de parts d'une longueur paire non nulle donnée est pair (voir [3, paragraphe 13.1] ou [32, paragraphe 2.5]).

Par la correspondance de Springer, on a une bijection Spr_B de X_G dans $D^{2,0}_{n,1}\subset Y^2_{n,1}=X^{2,0}_{n,1}$ donnée par la construction suivante (voir [13]).

Si $\lambda = (\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r)$, avec $\lambda_1 > 0$, est une partition paramétrant une classe de conjugaison de G, on partitionne la suite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ en blocs de longueur 1 ou 2 tel que tous les λ_i impairs sont dans un bloc de longueur 1 et tous les λ_i pairs sont dans un bloc de longueur 2.

On pose alors :

$$\begin{cases} c_i = \dfrac{\lambda_i - 1}{2} + i - 1 & \text{si } \{\lambda_i\} \text{ est un bloc} \\ c_i = c_{i+1} = \dfrac{\lambda_i}{2} + i - 1 = \dfrac{\lambda_{i+1}}{2} + i - 1 & \text{si } \{\lambda_i, \lambda_{i+1}\} \text{ est un bloc} \end{cases}$$

Soit s l'unique symbole de $D^{2,0}_{n,1}$ ayant pour entrées les c_i. On pose alors $Spr_B(\lambda) = s$. Enfin $\psi_B^{-1}(s) \in \mathrm{Irr}(W)$.

Par ailleurs, si $[\alpha', \beta'] \in \mathrm{Irr}(W)$, on fait correspondre à $[\alpha', \beta']$, $Spr_B^{-1}(s)$ où s est l'unique symbole distingué semblable à $\psi_B[\alpha', \beta']$. Ainsi on a une correspondance entre X_G et $X^{2,0}_{n,1}$ quotienté par la relation d'équivalence "être semblable", c'est-à-dire $[\alpha, \beta]$ et $[\alpha', \beta'] \in \mathrm{Irr}(W)$ correspondent à la même classe unipotente par la correspondance de Springer si et seulement si $\psi_B[\alpha, \beta]$ et $\psi_B[\alpha', \beta']$ sont semblables.

Exemple 1.12 Posons $n = 16$. Si $\lambda = (1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 7)$, alors

$$Spr_B(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & & 2 & & 4 & & 7 & & 9 & & 13 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 9 & & 11 & \end{pmatrix}$$

$$\psi_B^{-1}(Spr_B(\lambda)) = [000113, 12233]$$

Proposition 1.13 *Si λ est une partition correspondant à la classe de conjugaison de u dans G, alors $A(u) \simeq {\mathfrak{S}_2}^{z_B(u)}$, où $z_B(u) = n_{impair} - 1$ avec n_{impair} est égal au nombre de λ_i impairs distincts.*

Voir [3, paragraphe 13.1].

Via la bijection Spr_B, on pose, si $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)$, $z_B[\alpha, \beta] = z_B(O)$ où O est la classe unipotente associée à l'unique symbole distingué semblable à $\psi_B[\alpha, \beta]$.

Corollaire 1.14 *Si $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)$, alors, on a*

$$z_B[\alpha, \beta] = |Z/\sim| - 1$$

Z est l'ensemble des entrées de $\psi_B[\alpha,\beta]$ n'apparaissant qu'une seule fois.

La relation d'équivalence $\sim$ sur Z est définie à la définition 1.5. On rappelle que $a \sim b$ si $a \leq b$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_i \in Z$, $0 \leq i \leq k$ avec $a_0 = a$, $a_i = a + i$ et $a_k = b$ ou si $b \leq a$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_i \in Z$, $0 \leq i \leq k$ avec $a_0 = b$, $a_i = b + i$ et $a_k = a$.

Démonstration

Il suffit d'utiliser la proposition 1.13 et le système définissant Spr_B.

Expliquons brièvement cela.

Effectivement, les λ_i pairs (qui appartiennent tous à des blocs de longueur 2) donnent des entrées qui se répètent dans Λ.

Un ensemble de λ_i impairs égaux (dont chacun donne une entrée qui ne se répète pas dans Λ) donne quant à lui une classe d'équivalence de Z donc $|Z/\sim| = n_{impair}$.

□

Exemple 1.15 Dans le cadre de l'exemple précédent, connaissant λ, on a directement $z_B = 3$. Sinon avec le symbole, Z peut s'écrire comme union de ses classes d'équivalence : $Z = \{0,1,2\} \cup \{6,7\} \cup \{11\} \cup \{13\}$ et l'on trouve le même résultat.

Proposition 1.16 *Soit* $[\alpha,\beta] \in \mathrm{Irr}(W)$ *alors*

$$d_B[\alpha,\beta] = \sum_{\{c,c'\}} \min(c,c') - \frac{m(m-1)(4m+1)}{3}$$

où $\{c,c'\}$ décrit tous les ensembles à deux éléments de la suite des entrées de $\psi_B[\alpha,\beta]$.

Voir [13, proposition 2.23].

Exemple 1.17 Si G est un groupe réductif connexe de centre connexe de type B_2, on a :

Caractère de W	a_B	d_B	b_B	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
$[2,\varnothing]$	0	0	0	oui	1	1
$[11,\varnothing]$	1	1	2	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[1,1]$	1	1	1	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[\varnothing,2]$	1	2	2	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$[\varnothing,11]$	4	4	4	oui	1	1

Exemple 1.18 Si G est un groupe réductif connexe de centre connexe de type B_3, on a :

Caractère de W	a_B	d_B	b_B	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
$[3, \varnothing]$	0	0	0	oui	1	1
$[12, \varnothing]$	1	1	2	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[111, \varnothing]$	4	4	6	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[2, 1]$	1	1	1	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[11, 1]$	3	3	3	oui	1	1
$[1, 2]$	2	2	2	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
$[1, 11]$	4	4	4	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[\varnothing, 3]$	1	2	3	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[\varnothing, 12]$	4	5	5	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$[\varnothing, 111]$	9	9	9	oui	1	1

1.6 G de type C_n

Soit G un groupe réductif connexe de type C_n de centre connexe. Soit W son groupe de Weyl.

On rappelle que les représentations irréductibles de W, groupe de Weyl irréductible, sont paramétrées par les paires de partitions $[\alpha, \beta]$ avec $|\alpha| + |\beta| = n$, paires ordonnées [27, paragraphe 1.1].

Par exemple, la représentation triviale est paramétrée par $[n, \varnothing]$ et la représentation signe par $[\varnothing, 1 \dots 1]$.

Ainsi, comme on peut toujours rajouter des zéros à une partition, on a $\mathrm{Irr}(W) \simeq X_{n,1}^{0,0} = Y_{n,1}^{0}$.

1.6.1 Les invariants a_C, b_C et $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$

Pour ces invariants, il n'y a pas de différence entre les types B_n et C_n, on pourra donc se reporter au paragraphe 1.5.1 : $a_C = a_B$, $b_C = b_B$ et $f_C = f_B$.

1.6.2 Les invariants d_C et $A(u)$

Tout d'abord, pour $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)$, on associe à $[\alpha, \beta]$ le symbole $\psi_C[\alpha, \beta]$ qui vaut, si $\alpha = (\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{m+1})$ et $\beta = (\beta_1 \leq \dots \leq \beta_m)$,

$$\psi_C[\alpha,\beta] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \alpha_2+2 & & \alpha_3+4 & & \dots & & \alpha_{m+1}+2m \\ & \beta_1+1 & & \beta_2+3 & & \dots & & \beta_m+2m-1 & \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $X^{1,1}_{n,1} = \{\psi_C[\alpha,\beta],\ [\alpha,\beta] \in \mathrm{Irr}(W)\}$.

Les classes unipotentes X_G de G sont paramétrées par les partitions de $2n$ telles que le nombre de parts d'une longueur impaire donnée est pair (voir [3, paragraphe 13.1] ou [32, paragraphe 2.5]).

Par la correspondance de Springer, on a une bijection Spr_C de X_G dans $D^{1,1}_{n,1} \subset X^{1,1}_{n,1}$ donnée par la construction suivante (voir [13]).

Si $\lambda = (\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r)$ est une partition paramétrant une classe de conjugaison de G, quitte à rajouter à λ un zéro, on peut supposer r impair. On partitionne la suite $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ en blocs de longueur 1 ou 2 tel que tous les λ_i pairs sont dans un bloc de longueur 1 et tous les λ_i impairs sont dans un bloc de longueur 2.

On pose alors :

$$\begin{cases} c_i = \dfrac{\lambda_i}{2} + i - 1 & \text{si } \{\lambda_i\} \text{ est un bloc} \\ c_i = c_{i+1} = \dfrac{\lambda_i + 1}{2} + i - 1 = \dfrac{\lambda_{i+1}+1}{2} + i - 1 & \text{si } \{\lambda_i, \lambda_{i+1}\} \text{ est un bloc} \end{cases}$$

Soit s l'unique symbole de $D^{1,1}_{n,1}$ ayant pour entrées les c_i. On pose alors $Spr_C(\lambda) = s$. Enfin $\psi_C^{-1}(s) \in \mathrm{Irr}(W)$.

Par ailleurs, si $[\alpha', \beta'] \in \mathrm{Irr}(W)$, on fait correspondre à $[\alpha',\beta']$, $Spr_C^{-1}(s)$ où s est l'unique symbole distingué semblable à $\psi_C[\alpha',\beta']$. Ainsi on a une correspondance entre X_G et $X^{1,1}_{n,1}$ quotienté par la relation d'équivalence "être semblable", c'est-à-dire $[\alpha,\beta]$ et $[\alpha',\beta'] \in \mathrm{Irr}(W)$ correspondent à la même classe unipotente par la correspondance de Springer si et seulement si $\psi_C[\alpha,\beta]$ et $\psi_C[\alpha',\beta']$ sont semblables.

Exemple 1.19 Posons $n = 12$. Si $\lambda = (0,1,1,1,1,2,2,3,3,4,6)$, alors

$$Spr_C(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & & 2 & & 4 & & 7 & & 9 & & 13 \\ & 2 & & 4 & & 6 & & 9 & & 11 & \end{pmatrix}$$

$$\psi_C^{-1}(Spr_C(\lambda)) = [000113, 11122]$$

Proposition 1.20 *Si λ est une partition correspondant à la classe de conjugaison de u dans G, alors $A(u) \simeq {\mathfrak{S}_2}^{z_C(u)}$, où $z_C(u) = n_{pair} - \delta_C(u)$ avec :*

- *n_{pair} est égal au nombre de λ_i pairs non nuls distincts.*
- *$\delta_C(u)$ vaut 1 s'il existe une longueur k paire non nulle telle que le nombre de parts de λ valant k est impair et 0 sinon.*

Voir [3, paragraphe 13.1].

Via la bijection Spr_C, on pose, si $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)$, $z_C[\alpha, \beta] = z_C(O)$ où O est la classe unipotente associée à l'unique symbole distingué semblable à $\psi_C[\alpha, \beta]$.

Corollaire 1.21 *Soit $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)$. Quitte à appliquer le shift, on peut supposer que la première ligne de $\psi_C[\alpha, \beta]$ commence par 0. Alors on a*

$$z_C[\alpha, \beta] = |Z/\sim| - \delta_C(Spr_C^{-1}\psi_C[\alpha, \beta]) - 1$$

Z est l'ensemble des entrées de $\psi_C[\alpha, \beta]$ n'apparaissant qu'une seule fois.

La relation d'équivalence $\sim$ sur Z est définie à la définition 1.5. On rappelle que $a \sim b$ si $a \leq b$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_i \in Z$, $0 \leq i \leq k$ avec $a_0 = a$, $a_i = a + i$ et $a_k = b$ ou si $b \leq a$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_i \in Z$, $0 \leq i \leq k$ avec $a_0 = b$, $a_i = b + i$ et $a_k = a$.

Remarquons que $\delta_C(Spr_C^{-1}\psi_C[\alpha, \beta]) = 0$ si et seulement si toutes les classes d'équivalence sur Z, autres que la classe de 0, sont de cardinal pair.

Démonstration

Il suffit d'utiliser la proposition 1.20 et le système définissant Spr_C.

Expliquons brièvement cela.

Effectivement, les λ_i impairs (qui appartiennent tous à des blocs de longueur 2) donnent des entrées qui se répètent dans Λ.

Un ensemble de λ_i pairs égaux (dont chacun donne une entrée qui ne se répète pas dans Λ) donne quant à lui une classe d'équivalence de Z.

Par ailleurs, on suppose que la première ligne de Λ commence par un 0, donc $|Z/\sim|$ est égal au nombre de λ_i pairs distincts, dont 0, ainsi $|Z/\sim| = n_{pair} + 1$.

Enfin, la remarque sur δ_C est claire car on a noté qu'un ensemble de λ_i pairs égaux (dont chacun donne une entrée qui ne se répète pas dans Λ) donne quant à lui une classe d'équivalence de Z.

□

Exemple 1.22 Dans le cadre de l'exemple précédent, connaissant λ, on a directement $z_C = 2$. Sinon avec le symbole, Z peut s'écrire comme union de ses classes d'équivalence : $Z = \{0\} \cup \{6, 7\} \cup \{11\} \cup \{13\}$ et l'on trouve le même résultat.

Proposition 1.23 *Soit* $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)$ *alors*

$$d_C[\alpha, \beta] = \sum_{\{c,c'\}} \min(c, c') - \frac{m(4m^2 - 1)}{3}$$

où $\{c, c'\}$ *décrit tous les ensembles à deux éléments de la suite des entrées de* $\psi_C[\alpha, \beta]$.

Voir [13, proposition 2.23].

Exemple 1.24 Si G est un groupe réductif connexe de centre connexe de type C_2, on a :

Caractère de W	a_C	d_C	b_C	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
$[2, \varnothing]$	0	0	0	oui	1	1
$[11, \varnothing]$	1	2	2	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$[1, 1]$	1	1	1	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[\varnothing, 2]$	1	1	2	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[\varnothing, 11]$	4	4	4	oui	1	1

Exemple 1.25 Si G est un groupe réductif connexe de centre connexe de type C_3, on a :

Caractère de W	a_C	d_C	b_C	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
$[3, \varnothing]$	0	0	0	oui	1	1
$[12, \varnothing]$	1	2	2	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$[111, \varnothing]$	4	6	6	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$[2, 1]$	1	1	1	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[11, 1]$	3	3	3	oui	1	1
$[1, 2]$	2	2	2	oui	1	1
$[1, 11]$	4	4	4	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[\varnothing, 3]$	1	1	3	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[\varnothing, 12]$	4	4	5	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[\varnothing, 111]$	9	9	9	oui	1	1

1.7 G de type D_n

Soit G un groupe réductif connexe de type D_n de centre connexe. Soit W son groupe de Weyl.

On rappelle que les représentations irréductibles de W, groupe de Weyl irréductible, sont paramétrées par les paires de partitions $[\alpha, \beta]$ avec $|\alpha| + |\beta| = n$, paires non ordonnées avec $[\alpha, \alpha]$ comptées deux fois (représentations dégénérées) [27, paragraphe 1.1].

Par exemple, la représentation triviale est paramétrée par $[n, \varnothing] = [\varnothing, n]$ et la représentation signe par $[1 \ldots 1, \varnothing] = [\varnothing, 1 \ldots 1]$.

Ainsi, comme on peut toujours rajouter des zéros à une partition, on a $\mathrm{Irr}(W) \simeq Y^0_{n,0}$, en rappelant que l'on compte deux fois les symboles dégénérés.

1.7.1 Les invariants a_D, b_D et $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$

On rappelle maintenant plusieurs résultats de [3, paragraphe 11.4], [20, paragraphe 4.6] et [14].

Soit $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha] \in \mathrm{Irr}(W)$.

Le b-invariant est donné par la formule suivante :

$$b_D[\alpha, \beta] = 2n(\alpha) + 2n(\beta) + \min(|\alpha|, |\beta|)$$

On associe à $[\alpha, \beta]$ le symbole $\phi_0[\alpha, \beta]$ qui vaut, si $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_m)$ et $\beta = (\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_m)$,

$$\phi_0[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 + 1 & \alpha_3 + 2 & \ldots & \alpha_m + (m-1) \\ \beta_1 & \beta_2 + 1 & \beta_3 + 2 & \ldots & \beta_m + (m-1) \end{pmatrix}$$

Le a-invariant est donné par la formule suivante

$$a_D[\alpha, \beta] = \sum_{\{c, c'\}} \min(c, c') - \frac{m(m-1)(4m-5)}{6}$$

où $\{c, c'\}$ décrit tous les ensembles à deux éléments de la suite des entrées de $\phi_0[\alpha, \beta]$.

On en déduit :

$$[\alpha, \beta] \text{ spécial } \Longleftrightarrow \phi_0[\alpha, \beta] \text{ distingué}$$

Par ailleurs, on peut associer à la famille $\mathcal{F}$ de représentations irréductibles de W contenant $[\alpha, \beta]$ le groupe fini $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. Notons $\mathcal{F}$ la famille de $\mathrm{Irr}(W)$ de $[\alpha, \beta]$. Alors, notant Z l'ensemble des entrées de $\phi_0[\alpha, \beta]$ n'apparaissant qu'une seule fois (c'est-à-dire dans une et une seule des deux lignes du symbole), on a

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}} \simeq {\mathfrak{S}_2}^{f_D[\alpha,\beta]} \text{ avec } f_D[\alpha, \beta] = \max\left(0, \frac{|Z|}{2} - 1\right).$$

1.7.2 Les invariants d_D et $A(u)$

On rappelle que G est un groupe réductif connexe de centre connexe de type D_n.

Tout d'abord, pour $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)$, on associe à $[\alpha, \beta]$ le symbole $\psi_D[\alpha, \beta]$ qui vaut, si $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_m)$ et $\beta = (\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_m)$,

$$\psi_D[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 + 2 & \alpha_3 + 4 & \ldots & \alpha_m + 2(m-1) \\ \beta_1 & \beta_2 + 2 & \beta_3 + 4 & \ldots & \beta_m + 2(m-1) \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $Y^2_{n,0} = \{\psi_D[\alpha, \beta],\ [\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)\}$.

Les classes unipotentes X_G de G sont paramétrées par les partitions de $2n$ telles que le nombre de parts d'une longueur paire non nulle donnée est pair (voir [3, paragraphe 13.1] ou [32, paragraphe 2.5]), avec la convention de compter deux fois les partitions de $2n$ dont toutes les parts sont paires (cela n'arrive que si n est pair).

Par la correspondance de Springer, on a une bijection Spr_D de X_G dans $D^2_{n,0} \subset Y^2_{n,0}$, où l'on compte deux fois les symboles dégénérés, donnée par la construction suivante (voir [13]).

Si $\lambda = (\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r)$, avec $\lambda_1 > 0$, est une partition paramétrant une classe de conjugaison de G, dans ce cas, r est unique et est appelé la longueur de la partition λ [14, paragraphe 2.3.6]. On partitionne la suite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ en blocs de longueur 1 ou 2 tel que tous les λ_i impairs sont dans un bloc de longueur 1 et tous les λ_i pairs sont dans un bloc de longueur 2.

On pose alors :

$$\begin{cases} c_i = \dfrac{\lambda_i - 1}{2} + i - 1 & \text{si } \{\lambda_i\} \text{ est un bloc} \\ c_i = c_{i+1} = \dfrac{\lambda_i}{2} + i - 1 = \dfrac{\lambda_{i+1}}{2} + i - 1 & \text{si } \{\lambda_i, \lambda_{i+1}\} \text{ est un bloc} \end{cases}$$

Soit s l'unique symbole de $D^2_{n,0}$ ayant pour entrées les c_i. On pose alors $Spr_D(\lambda) = s$. Enfin $\psi_D^{-1}(s) \in \mathrm{Irr}(W)$.

Par Spr_D, les partitions de $2n$ dont toutes les parts sont paires correspondent aux symboles de $D^2_{n,0}$ dégénérés (tous deux sont comptés deux fois). Si les symboles dégénérés ne sont pas comptés deux fois, Spr_D est bien défini ; comme ceux-ci sont comptés deux fois, Spr_D n'est pas parfaitement défini sur les symboles dégénérés mais cela n'a pas d'incidence sur la suite de ce travail.

Par ailleurs, si $[\alpha', \beta'] \in \mathrm{Irr}(W)$, on fait correspondre à $[\alpha', \beta']$, $Spr_D^{-1}(s)$ où s est l'unique symbole distingué semblable à $\psi_D[\alpha', \beta']$. Ainsi on a une correspondance entre X_G et $Y^2_{n,0}$ quotienté par la relation d'équivalence "être semblable", c'est-à-dire $[\alpha, \beta]$ et $[\alpha', \beta'] \in \mathrm{Irr}(W)$ correspondent à la même classe unipotente par la correspondance de Springer si et seulement si $\psi_D[\alpha, \beta]$ et $\psi_D[\alpha', \beta']$ sont semblables.

Exemple 1.26 Posons $n = 13$. Si $\lambda = (1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)$, alors

$$Spr_D(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 6 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\psi_D^{-1}(Spr_D(\lambda)) = [00011, 12233]$$

Proposition 1.27 *Si λ est une partition correspondant à la classe de conjugaison de u dans G, alors $A(u) \simeq {\mathfrak{S}_2}^{z_D(u)}$, où $z_D(u) = n_{impair} - 1 - \delta_D(u)$ si $n_{impair} \neq 0$ et $r = 0$ sinon avec :*

- *n_{impair} est égal au nombre de λ_i impairs distincts.*
- *$\delta_D(u)$ vaut 1 s'il existe une longueur k impaire telle que le nombre de parts de λ valant k est impair et 0 sinon.*

Voir [3, paragraphe 13.1].

Via la bijection Spr_D, on pose, si $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)$, $z_D[\alpha, \beta] = z_D(O)$ où O est la classe unipotente associée à l'unique symbole distingué semblable à $\psi_D[\alpha, \beta]$.

Corollaire 1.28 *Si $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W)$, alors, on a*

$$z_D[\alpha, \beta] = \begin{cases} |Z/\sim| - \delta_D(Spr_D^{-1}\psi_D[\alpha, \beta]) - 1 & \textit{si } |Z/\sim| \neq 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Z est l'ensemble des entrées de $\psi_D[\alpha, \beta]$ n'apparaissant qu'une seule fois.

La relation d'équivalence $\sim$ sur Z est définie à la proposition 1.5. On rappelle que $a \sim b$ si $a \leq b$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_i \in Z$, $0 \leq i \leq k$ avec $a_0 = a$, $a_i = a+i$ et $a_k = b$ ou si $b \leq a$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_i \in Z$, $0 \leq i \leq k$ avec $a_0 = b$, $a_i = b+i$ et $a_k = a$.

Remarquons que $|Z/\sim| = 0$ si et seulement si Λ est dégénéré et que $\delta_D(Spr_D^{-1}\psi_D[\alpha,\beta]) = 0$ si et seulement si toutes les classes d'équivalence sur Z sont de cardinal pair.

Démonstration

Il suffit d'utiliser la proposition 1.27 et le système définissant Spr_D.

Expliquons brièvement cela.

Effectivement, les λ_i pairs (qui appartiennent tous à des blocs de longueur 2) donnent des entrées qui se répètent dans Λ.

Un ensemble de λ_i impairs égaux (dont chacun donne une entrée qui ne se répète pas dans Λ) donne quant à lui une classe d'équivalence de Z donc $|Z/\sim| = n_{impair}$.

Enfin, la remarque sur δ_D est claire car on a noté qu'un ensemble de λ_i impairs égaux (dont chacun donne une entrée qui ne se répète pas dans Λ) donne quant à lui une classe d'équivalence de Z.

□

Exemple 1.29 Dans le cadre de l'exemple précédent, connaissant λ, on a directement $z_D = 1$. Sinon avec le symbole, Z peut s'écrire comme union de ses classes d'équivalence : $Z = \{0,1,2\} \cup \{6,7\} \cup \{11\}$ et l'on trouve le même résultat.

Proposition 1.30 *Soit $[\alpha,\beta] \in \mathrm{Irr}(W)$ alors*

$$d_D[\alpha,\beta] = \sum_{\{c,c'\}} \min(c,c') - \frac{m(m-1)(4m-5)}{3}$$

où $\{c,c'\}$ décrit tous les ensembles à deux éléments de la suite des entrées de $\psi_D[\alpha,\beta]$.

Voir [13, proposition 2.23].

Exemple 1.31 Si G est un groupe réductif connexe de centre connexe de type D_4, on a :

Caractère de W	a_D	d_D	b_D	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
$[4,\varnothing]$	0	0	0	oui	1	1
$[13,\varnothing]$	2	2	2	oui	1	1
$[22,\varnothing]$	3	4	4	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$[112,\varnothing]$	6	6	6	oui	1	1
$[1111,\varnothing]$	12	12	12	oui	1	1
$[3,1]$	1	1	1	oui	1	1
$[12,1]$	3	3	3	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[111,1]$	7	7	7	oui	1	1
$[2,2]$	2	2	2	oui	1	1
$[2,11]$	3	3	4	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$[11,11]$	6	6	6	oui	1	1

1.8 Cas où G est un groupe exceptionnel

Dans cette section, nous allons donner les tables indiquant les différentes valeurs des invariants pour les caractères irréductibles de W, groupe de Weyl de type exceptionnel. On rappelle que l'on numérote les diagrammes de Dynkin comme cela est indiqué en page 16.

Pour remplir ces tables, on utilise [20, chapitre 4], [3, chapitre 13], [32] et `GAP` accompagné du système `CHEVIE` [12]. Nous avons d'ailleurs choisi l'ordre de `GAP` pour les caractères irréductibles de W ainsi que la paramétrisation de G. Lusztig [20, chapitre 4]. Remarquons que les résultats de [3, chapitre 13] sont donnés en caractéristique 0 mais qu'ils restent valables en bonne caractéristique, voir, par exemple, [13, paragraphe 2].

Rappelons que `GAP` avec le système `CHEVIE` donne la correspondance entre la paramétrisation de G. Lusztig et celle utilisée dans [3] à l'aide de la fonction `ChevieCharInfo`.

L'invariant a est donné par la fonction `LowestPowerGenericDegrees` et l'invariant b par la fonction `LowestPowerFakeDegrees`.

On rappelle que G est un groupe réductif connexe de centre connexe.

1.8.1 G de type G_2

On rappelle que le diagramme de type G_2 est numéroté comme cela est indiqué à la page 16.

On remplit la table suivante à l'aide de [3, page 412] et [20, page 95].

Table 1.32 G de type G_2

Caractère de W	a	d	b	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
$\phi_{1,0}$	0	0	0	oui	1	1
$\phi_{1,6}$	6	6	6	oui	1	1
$\phi'_{1,3}$	1	1	3	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$\phi''_{1,3}$	1	3	3	non	$\mathfrak{S}_3$	1
$\phi_{2,1}$	1	1	1	oui	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$\phi_{2,2}$	1	2	2	non	$\mathfrak{S}_3$	1

1.8.2 G de type F_4

On rappelle que le diagramme de type F_4 est numéroté comme cela est indiqué à la page 16.

On remplit la table suivante à l'aide de [3, page 414] et de [20, page 96],

Table 1.33 G de type F_4

Caractère de W	a	d	b	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
1_1	0	0	0	oui	1	1
1_2	4	9	12	non	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_2$
1_3	4	4	12	non	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_4$
1_4	24	24	24	oui	1	1
2_1	1	2	4	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
2_2	13	13	16	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
2_3	1	1	4	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
2_4	13	16	16	non	$\mathfrak{S}_2$	1
4_1	4	6	8	non	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_2$
9_1	2	2	2	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
9_2	4	6	6	non	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_2$
9_3	4	4	6	non	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_4$
9_4	10	10	10	oui	1	1
6_1	4	6	6	non	$\mathfrak{S}_4$	1
6_2	4	4	6	non	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_4$
12	4	4	4	oui	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_4$
4_2	1	1	1	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
4_3	4	7	7	non	$\mathfrak{S}_4$	1
4_4	4	5	7	non	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_2$
4_5	13	13	13	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
8_1	3	3	3	oui	1	1
8_2	9	9	9	oui	1	1
8_3	3	3	3	oui	1	1
8_4	9	9	9	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
16	4	5	5	non	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_2$

1.8.3 G de type E_6

On remplit la table suivante à l'aide de [3, page 415] et [20, page 99].

Table 1.34 G de type E_6

Caractère de W	a	d	b	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
1_p	0	0	0	oui	1	1
$1'_p$	36	36	36	oui	1	1
10_s	7	9	9	non	$\mathfrak{S}_3$	1
6_p	1	1	1	oui	1	1
$6'_p$	25	25	25	oui	1	1
20_s	7	7	10	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
15_p	3	3	5	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$15'_p$	15	15	17	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
15_q	3	4	4	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$15'_q$	15	16	16	non	$\mathfrak{S}_2$	1
20_p	2	2	2	oui	1	1
$20'_p$	20	20	20	oui	1	1
24_p	6	6	6	oui	1	1
$24'_p$	12	12	12	oui	1	1
30_p	3	3	3	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$30'_p$	15	15	15	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
60_s	7	8	8	non	$\mathfrak{S}_3$	1
80_s	7	7	7	oui	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
90_s	7	7	8	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
60_p	5	5	5	oui	1	1
$60'_p$	11	11	11	oui	1	1
64_p	4	4	4	oui	1	1
$64'_p$	13	13	13	oui	1	1
81_p	6	6	6	oui	1	1
$81'_p$	10	10	10	oui	1	1

1.8.4 G de type E_7

On remplit la table suivante à l'aide de [3, page 415] et [20, page 101]

Table 1.35 G de type E_7

Caractère de W	a	d	b	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
1_a	0	0	0	oui	1	1
$1'_a$	63	63	63	oui	1	1
7_a	46	46	46	oui	1	1
$7'_a$	1	1	1	oui	1	1
15_a	25	28	28	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$15'_a$	4	5	7	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
21_a	3	3	6	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$21'_a$	30	30	33	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
21_b	36	36	36	oui	1	1
$21'_b$	3	3	3	oui	1	1
27_a	2	2	2	oui	1	1
$27'_a$	37	37	37	oui	1	1
35_a	16	16	22	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$35'_a$	7	7	13	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
35_b	3	4	4	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$35'_b$	30	31	31	non	$\mathfrak{S}_2$	1
56_a	30	30	30	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$56'_a$	3	3	3	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
70_a	16	18	18	non	$\mathfrak{S}_3$	1
$70'_a$	7	9	9	non	$\mathfrak{S}_3$	1
84_a	10	12	12	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$84'_a$	13	14	15	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
105_a	25	25	26	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$105'_a$	4	4	5	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
105_b	6	6	6	oui	1	1
$105'_b$	21	21	21	oui	1	1
105_c	12	12	12	oui	1	1
$105'_c$	15	15	15	oui	1	1
120_a	4	4	4	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$120'_a$	25	25	25	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$

à suivre

Suite de G de type E_7

Caractère de W	a	d	b	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
168_a	6	6	6	oui	1	1
$168'_a$	21	21	21	oui	1	1
189_a	8	8	10	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$189'_a$	15	15	17	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
189_b	22	22	22	oui	1	1
$189'_b$	5	5	5	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
189_c	20	20	20	oui	1	1
$189'_c$	7	7	7	oui	1	1
210_a	6	6	6	oui	1	1
$210'_a$	21	21	21	oui	1	1
210_b	10	10	10	oui	1	1
$210'_b$	13	13	13	oui	1	1
216_a	15	16	16	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$216'_a$	8	9	9	non	$\mathfrak{S}_2$	1
280_a	16	16	18	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$280'_a$	7	7	9	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
280_b	7	8	8	non	$\mathfrak{S}_3$	1
$280'_b$	16	17	17	non	$\mathfrak{S}_3$	1
315_a	16	16	16	oui	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$315'_a$	7	7	7	oui	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
336_a	13	13	14	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$336'_a$	10	10	11	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
378_a	14	14	14	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
$378'_a$	9	9	9	oui	1	1
405_a	8	8	8	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$405'_a$	15	15	15	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
420_a	10	10	10	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$420'_a$	13	13	13	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
512_a	11	11	12	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$512'_a$	11	11	11	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$

1.8.5 G de type E_8

On remplit la table suivante à l'aide de [3, page 416] et [20, page 105].

Table 1.36 G de type E_8

Caractère de W	a	d	b	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
1_x	0	0	0	oui	1	1
$1'_x$	120	120	120	oui	1	1
28_x	3	3	8	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$28'_x$	63	63	68	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
35_x	2	2	2	oui	1	1
$35'_x$	74	74	74	oui	1	1
70_y	16	16	32	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_5$
50_x	4	5	8	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$50'_x$	52	56	56	non	$\mathfrak{S}_2$	1
84_x	3	4	4	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$84'_x$	63	64	64	non	$\mathfrak{S}_2$	1
168_y	16	21	24	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_2$
175_x	8	10	12	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$175'_x$	32	36	36	non	$\mathfrak{S}_3$	1
210_x	4	4	4	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$210'_x$	52	52	52	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
420_y	16	20	20	non	$\mathfrak{S}_5$	1
300_x	6	6	8	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$300'_x$	42	42	44	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
350_x	8	8	14	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$350'_x$	32	32	38	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
525_x	12	12	12	oui	1	1
$525'_x$	36	36	36	oui	1	1
567_x	6	6	6	oui	1	1
$567'_x$	46	46	46	oui	1	1
1134_y	16	18	20	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_2$
700_{xx}	13	14	16	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$700'_{xx}$	25	28	28	non	$\mathfrak{S}_2$	1
700_x	6	6	6	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$700'_x$	42	42	42	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$

à suivre

Suite de G de type E_8

Caractère de W	a	d	b	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
1400_y	16	16	20	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_5$
840_x	12	13	14	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$840'_x$	24	26	26	non	$\mathfrak{S}_2$	1
1680_y	16	16	22	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_5$
972_x	10	12	12	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$972'_x$	30	31	32	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
1050_x	8	9	10	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_2$
$1050'_x$	32	34	34	non	$\mathfrak{S}_3$	1
2100_y	20	20	20	oui	1	1
1344_x	7	8	8	non	$\mathfrak{S}_3$	1
$1344'_x$	37	38	38	non	$\mathfrak{S}_3$	1
2688_y	16	18	20	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_2$
1400_x	8	8	8	oui	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$1400'_x$	32	32	32	oui	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
1575_x	8	8	10	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$1575'_x$	32	32	34	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
3150_y	16	18	18	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_2$
2100_x	13	13	16	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$2100'_x$	25	25	28	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
4200_y	16	18	18	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_2$
2240_x	10	10	10	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$
$2240'_x$	28	28	28	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
4480_y	16	16	16	oui	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_5$
2268_x	10	10	10	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$2268'_x$	30	30	30	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
4536_y	16	16	18	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_5$
2835_x	14	14	14	oui	1	1
$2835'_x$	22	22	22	oui	1	1
5670_y	16	16	18	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_5$
3200_x	15	16	16	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$3200'_x$	21	22	22	non	$\mathfrak{S}_2$	1
4096_x	11	11	12	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$4096'_x$	26	26	26	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
4200_x	12	12	12	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$

à suivre

Suite de G de type E_8

Caractère de W	a	d	b	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
$4200'_x$	24	24	24	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
6075_x	14	14	14	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
$6075'_x$	22	22	22	oui	1	1
8_z	1	1	1	oui	1	1
$8'_z$	91	91	91	oui	1	1
56_z	7	7	19	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$56'_z$	37	37	49	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
112_z	3	3	3	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$112'_z$	63	63	63	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
160_z	4	4	7	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$160'_z$	52	52	55	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
448_w	16	17	25	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_3$
400_z	6	7	7	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$400'_z$	42	43	43	non	$\mathfrak{S}_2$	1
448_z	7	9	9	non	$\mathfrak{S}_3$	1
$448'_z$	37	39	39	non	$\mathfrak{S}_3$	1
560_z	5	5	5	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
$560'_z$	47	47	47	oui	1	1
1344_w	16	19	19	non	$\mathfrak{S}_5$	1
840_z	10	10	13	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$
$840'_z$	28	28	31	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
1008_z	7	7	9	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$1008'_z$	37	37	39	non	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
2016_w	16	19	19	non	$\mathfrak{S}_5$	1
1296_z	10	10	13	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$1296'_z$	30	30	33	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
1400_{zz}	10	11	11	non	$\mathfrak{S}_2$	1
$1400'_{zz}$	28	29	29	non	$\mathfrak{S}_2$	1
1400_z	7	7	7	oui	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$1400'_z$	37	37	37	oui	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
2400_z	15	15	17	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$2400'_z$	21	21	23	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
2800_z	13	13	13	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$2800'_z$	25	25	25	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$

à suivre

Suite de G de type E_8

Caractère de W	a	d	b	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	$A(u)$
5600_w	16	17	19	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_3$
3240_z	9	9	9	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
$3240'_z$	31	31	31	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
3360_z	12	12	13	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$3360'_z$	24	24	25	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
7168_w	16	17	17	non	$\mathfrak{S}_5$	$\mathfrak{S}_3$
4096_z	11	11	11	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$4096'_z$	26	26	27	non	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
4200_z	15	15	15	oui	1	1
$4200'_z$	21	21	21	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
4536_z	13	13	13	oui	1	$\mathfrak{S}_2$
$4536'_z$	23	23	23	oui	1	1
5600_z	15	15	15	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$5600'_z$	21	21	21	oui	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$

Chapitre 2

Induction et invariants

Sommaire

Dans le cadre de ce travail, ce chapitre contient les premières étapes vers la démonstration des théorèmes A et B. D'un point de vue un peu plus large, on établira des résultats généraux concernant l'induction des caractères dans les groupes de Weyl et la compatibilité avec les d-invariants des caractères. Les résultats que l'on va obtenir ressemblent, par exemple, aux résultats sur la "J-induction" des caractères [20, chapitre 4].

2.1 Cadre général

2.1.1 La fonction Φ_G

Nous rappelons ici le cadre dans lequel nous nous plaçons en citant [9, paragraphe 4]. Citons également [23, paragraphe 1].

Soit k une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_p$ où p est un nombre premier. Soit G un groupe réductif connexe sur k et soit G^* le dual de Langlands de G. On suppose que le centre de G est connexe et que p est suffisamment grand. L'hypothèse que le centre de G soit connexe entraîne que le centralisateur de chaque élément semisimple dans G^* est connexe ([20, paragraphe 8.4] et [3, paragraphe 3.5]). C'est d'ailleurs aussi l'hypothèse en vigueur dans le livre de G. Lusztig [20]. L'hypothèse que p soit suffisamment grand vient de l'article [25] où G. Lusztig a établi les résultats concernant le support unipotent des faisceaux-caractères. On suppose aussi que $G/Z(G)$ est simple.

Soient T un tore maximal fixé de G et $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl de G. Soit $T^* \subset G^*$ un tore maximal dual. On peut alors naturellement identifier le groupe de Weyl W^* de G^* relativement à T^* à W : cela est expliqué dans [20, paragraphe 8.4]. De plus, si l'on fixe également un sous groupe de Borel de G, respectivement de G^*, contenant T, respectivement T^*, ce qui revient à fixer un système de racines simples pour les groupes W et W^*, les deux systèmes de racines simples se correspondent via l'identification précédente.

Dans l'introduction, on a déjà mentionné l'existence d'une application Φ_G de l'ensemble des classes dites "spéciales" dans G^* dans l'ensemble des classes unipotentes de G. Cette application décrit le support unipotent des faisceaux-caractères. En fait, G. Lusztig [25] a donné une description directe de cette application, sans référence au support unipotent des faisceaux-caractères. Cette description implique seulement la correspondance de Springer et certains invariants des caractères des groupes de Weyl finis. Nous allons maintenant expliciter la construction de cette application :

$$\Phi_G \,:\, \{C \mid C \text{ classe spéciale dans } G^*\} \longrightarrow \{O \mid O \text{ classe unipotente dans } G\}$$

Tout d'abord, définissons la notion de classes unipotentes spéciales de H, où H est un groupe algébrique réductif connexe [20, paragraphe 13.1]. Soit u un élément d'une classe unipotente de H. Considérons la paire $(u, 1)$ où le 1 désigne le caractère trivial du groupe fini $A(u) = C_H(u)/C_H(u)^\circ$. Via la correspondance de Springer, on peut associer à $(u, 1)$ un caractère du groupe de Weyl de H. On dira que la classe unipotente de u est spéciale si ce caractère est spécial (cette notion de caractère spécial d'un groupe de Weyl a été introduite au chapitre 1). Dans ce contexte, le centre de H n'est pas supposé connexe et donc la correspondance de Springer évoquée ici est plus générale que celle décrite au chapitre précédent.

Définissons maintenant les classes spéciales de G^* [20, paragraphe 13.3]. Soit g un élément d'une classe de conjugaison C de G^*. Soit $g = su = us$ la décomposition de Jordan de g avec s semisimple et u unipotent. Alors, u est un élément unipotent du groupe réductif connexe $C_{G^*}(s)$ et on dira que la classe C de g dans G^* est spéciale si la classe unipotente de u dans $C_{G^*}(s)$ est spéciale. Ceci nous permet d'avoir une correspondance entre les classes spéciales de G^* et les paires $(s, \mathcal{F})$ où $s \in T^*$ (quitte à remplacer g par un de ses conjugués, on peut supposer $s \in T^*$) et $\mathcal{F}$ est une famille de représentations de W_s, groupe de Weyl de $C_{G^*}(s)$. $\mathcal{F}$ est l'unique famille contenant le caractère spécial de W_s associé à u via la correspondance de Springer. Ainsi, par la suite, on travaillera indifféremment sur les classes spéciales de G^* ou sur les paires $(s, \mathcal{F})$. On notera $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des classes spéciales de G^* ou des paires comme ci-dessus.

Définissons maintenant l'application :

$$\Phi_G \,:\, \{C \mid C \text{ classe spéciale dans } G^*\} \longrightarrow \{O \mid O \text{ classe unipotente dans } G\}$$

Soit C une classe spéciale de G^*, c'est-à-dire soit $(s, \mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$.

Soit E_C l'unique caractère spécial de $\mathcal{F}$, qui ne dépend que de la classe C. E_C est un caractère du groupe de Weyl W_s, qui peut être canoniquement identifié à un sous groupe de W. On peut donc considérer l'induction de E_C de W_s à W.

Proposition 2.1 *Avec les notations précédentes, on a :*

(a) Soit $\tilde{E} \in \mathrm{Irr}(W)$ un caractère qui apparaît dans l'induction $\mathrm{Ind}_{W_s}^{W}(E_C)$. Alors on a $d(\tilde{E}) \geq b(E_C)$.

(b) Il existe un unique $E'_C \in \mathrm{Irr}(W)$ *tel que*

$$d(E'_C) = b(E'_C) = b(E_C),$$

$$\mathrm{Ind}_{W_s}^{W}(E_C) = E'_C + \textit{somme de } \tilde{E} \in \mathrm{Irr}(W) \textit{ avec } b(\tilde{E}) > b(E_C).$$

Voir [25, paragraphe 10] et [20, paragraphe 13.3].

Via la correspondance de Springer, à E'_C, on peut associer une classe unipotente O de G. On pose alors $\Phi_G(C) = \Phi_G(s, \mathcal{F}) = O$. Notant X_G l'ensemble des classes unipotentes de G, Φ_G est une application de $\mathcal{P}(G)$ dans X_G. Il est indiqué, dans [20, paragraphe 13.3], que Φ_G est surjective.

Nous allons pouvoir maintenant énoncer un théorème dû à G. Lusztig [25, paragraphe 10 et corollaire 10.9].

2.1.2 Lien avec le support unipotent

Rappelons ce que nous avons évoqué dans l'introduction.

Tout d'abord, notant $\hat{G}$ l'ensemble des faisceaux-caractères sur G, on a une partition naturelle

$$\hat{G} = \coprod_C \hat{G}_C \quad \text{avec} \quad |\hat{G}_C| < \infty,$$

où C parcourt l'ensemble des classes spéciales de G^*.

Théorème 2.2 *Soient C une classe spéciale dans G^* et $O = \Phi_G(C)$, classe unipotente de G, où Φ_G est l'application décrite au paragraphe précédent, alors on a les propriétés suivantes :*

(a) Il existe un $A \in \hat{G}_C$ *tel que* $A|_O \neq 0$.

(b) Soit $A \in \hat{G}_C$ *et* O' *une classe unipotente de* G *telle que* $A|_{O'} \neq 0$. *Alors on a* $\dim O' < \dim O$ *ou* $O' = O$.

On dira que O est le support unipotent des faisceaux-caractères de $\hat{G}_C$.

On pourra trouver cela dans [25, paragraphe 10, théorème 10.7 et corollaire 10.9], et aussi dans les remarques dans [9, paragraphe 4.3].

2.1.3 Problème et premiers éléments de réponse

Nous allons définir ci-dessous la notion de classe isolée. Cette définition apparaît dans [21, paragraphe 2.6].

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à la question suivante : dans le cas d'une classe spéciale isolée C de G^*, est-ce que E'_C est le seul caractère irréductible de W apparaissant dans $\mathrm{Ind}_{W_s}^W(E_C)$ dont le d-invariant est égal à $b(E_C)$?

Dans ce chapitre, on va donner, dans le cadre des classes isolées, une condition combinatoire pour que la réponse à cette question soit positive.

Pour cela, on introduit la notation suivante :

Définition 2.3 Dans la situation précédente, soit E''_C la somme de tous les caractères irréductibles $\tilde{E} \in \mathrm{Irr}(W)\backslash\{E'_C\}$ tels que $d(\tilde{E}) = b(E_C)$ et $\tilde{E}$ apparaît dans l'induction $\mathrm{Ind}_{W_s}^W(E_C)$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Ind}_{W_s}^W(E_C) = E'_C + E''_C + \text{ somme de caractères } \tilde{E} \text{ avec } d(\tilde{E}) > b(E_C)$$

La question se ramène donc à l'évaluation de E''_C, notamment sa nullité. Le but de ce chapitre est de déterminer explicitement E''_C pour les cas où W est irréductible et où C est une classe spéciale isolée de G^*.

2.1.4 Signification de classe isolée

Nous allons maintenant définir la notion de classe isolée. Cette définition apparaît dans [21, paragraphe 2.6].

Définition 2.4 On dira qu'une classe C de G^* est isolée si le centralisateur de la partie semisimple d'un élément dans C n'est pas contenu dans un sous groupe de Levi d'un sous groupe parabolique propre de G^*.

Soient C une classe spéciale de G^* et $(s, \mathcal{F})$ une paire correspondant à C.

On dira que $(s, \mathcal{F})$ est une paire isolée si et seulement si C est une classe spéciale isolée. La liste des sous groupes W_s (pour s isolée et semisimple) s'obtient à l'aide de [5, proposition 2.3.4]. Pour chaque type de W, ces listes sont explicitement connues ([5], [4] et [2]). Nous expliciterons cela dans les paragraphes suivants.

Cela nous donne donc déjà un cas où la réponse à notre question est triviale : lorsque s est central et donc $W_s = W$.

2.2 Résultat pour le type A_{n-1}

Proposition 2.5 *Soit G de type A_{n-1}. Alors, avec les notations de la définition 2.3, on a $E''_C = 0$.*

Démonstration

Le résultat est évident d'après la proposition 2.1 et par le paragraphe 1.3, dans le type A_{n-1}, il n'y a pas de différence entre le b-invariant et le d-invariant. En particulier, la condition "C isolée" n'est pas nécessaire.

$\square$

2.3 Résultat pour le type B_n

On considère un groupe réductif connexe G tel que le centre $Z(G)$ soit connexe et tel que $G/Z(G)$ soit simple de type B_n. Alors le groupe dual G^* est de type C_n. Soit C une classe spéciale isolée de G^*, $s \in T^*$ la partie semisimple d'un élément dans C et W_s le groupe de Weyl de $C_{G^*}(s)$, identifié à un sous groupe de W.

2.3.1 Cadre et résultat

Lemme 2.6 *$W_s \subset W$ est un produit direct $W_s = W_a \times W_b$ (avec $n = a + b$) où W_a est un groupe de Weyl de type B_a et W_b est un groupe de Weyl de type B_b (avec la convention que $W_0 = \{1\}$).*

Démonstration

Comme W est de type B_n, W^* est de type C_n. Par [2], W_s, vu comme sous groupe de W^* est de type $C_a \times C_b$ avec $a + b = n$. Donc W_s, vu comme sous groupe de W via l'identification canonique entre W et W^*, est de type $B_a \times B_b$ avec $a + b = n$.

$\square$

Soit maintenant $E_C \in \mathrm{Irr}(W_s)$ un caractère spécial. Comme W_s est un produit direct, alors on a $E_C = [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu]$ avec $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W_a)$ et $[\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W_b)$, tous deux spéciaux.

Proposition 2.7 *Soit G de type B_n. Alors, avec les notations de la définition 2.3, on a $E''_C = 0$.*

2.3.2 Induction de $B \times B$ dans B

Il s'agit maintenant d'un paragraphe intermédiaire pour la démonstration de la proposition 2.7. Il nous faut effectivement comprendre l'induction de W_s à W : $\mathrm{Ind}_{W_s}^{W}$.

Soient W_a et W_b deux sous groupes de Weyl de W_n avec W_i de type B_i, pour $i = a$, b ou n et $a + b = n$.

Soient $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W_a)$ et $[\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W_b)$, on souhaite expliciter l'induction de $[\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W_a \times W_b)$ à W_n.

Théorème 2.8

$$\mathrm{Ind}_{W_a \times W_b}^{W_n} [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] = \sum c_{\alpha,\lambda}^{\delta} c_{\beta,\mu}^{\gamma} [\delta, \gamma]$$

où la somme parcourt toutes les paires de partitions (δ, γ) *avec* $|\delta| = |\alpha| + |\lambda|$ *et* $|\gamma| = |\beta| + |\mu|$.

$c_{\alpha,\lambda}^{\delta}$ *est le coefficient de Littlewood-Richardson.*

Soit $\delta_0 = \alpha + \lambda$, *on a alors :*

- $c_{\alpha,\lambda}^{\delta_0} = 1$.
- $c_{\alpha,\lambda}^{\delta} \neq 0$ *implique* $\delta \prec \delta_0$.

On pourra trouver cela dans [14, paragraphe 6.1].

2.3.3 Démonstration de la proposition 2.7

Soient W_a et W_b deux sous groupes de Weyl de W_n, chacun étant respectivement de type B_a, B_b et B_n avec $a + b = n$.

Soient $A = [\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W_a)$, $B = [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W_b)$, tous deux spéciaux.

On a $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_{m+1})$, $\beta = (\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_m)$, $\lambda = (\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{m+1})$ et $\mu = (\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_m)$.

Soit $E'_C \in \mathrm{Irr}(W_n)$ défini dans la proposition 2.1 pour $E_C = [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W_a \times W_b)$.

Proposition 2.9 E'_C *est paramétré par* $[\alpha + \lambda, \beta + \mu]$.

Démonstration

Soit $C = [\alpha + \lambda, \beta + \mu] \in \mathrm{Irr}(W_n)$. Alors C apparaît exactement une fois dans $\mathrm{Ind}_{W_a \times W_b}^{W_n} A \boxtimes B$ (théorème 2.8) et $b_B(C) = b_B(A) + b_B(B) = b_{B \times B}(A \boxtimes B)$.

Par ailleurs, par le théorème 2.8, si $\tilde{E} = [\delta, \gamma]$ apparaît dans $\mathrm{Ind}_{W_a \times W_b}^{W_n} A \boxtimes B$ alors $[\delta, \gamma] \prec [\alpha + \lambda, \beta + \mu]$. Donc $b_B(\tilde{E}) \geq b_B(E'_C)$ avec égalité si et seulement si $\tilde{E} = E'_C$.

$\square$

Remarque 2.10 Dans cette démonstration, on n'a pas utilisé que A et B étaient spéciaux.

Proposition 2.11 *On a* $d_B(E'_C) = b_{B \times B}(A \boxtimes B)$.

Démonstration

Cela découle des propositions 2.1 et 2.9. Cependant, nous allons tout de même faire le calcul explicite.

Comme A et B sont supposés spéciaux, $\phi_1(A)$ et $\phi_1(B)$ sont distingués donc, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\alpha_i + i - 1 \leq \beta_i + i - 1 \leq \alpha_{i+1} + i$ et $\lambda_i + i - 1 \leq \mu_i + i - 1 \leq \lambda_{i+1} + i$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\alpha_i + \lambda_i + 2(i-1) \leq \beta_i + \mu_i + 2(i-1) \leq \alpha_{i+1} + \lambda_{i+1} + 2i$, c'est-à-dire $\psi_B(E'_C)$ est distingué.

Effectivement, $\psi_B(E'_C) = \phi_1(A) + \phi_1(B)$.

$$\phi_1(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \alpha_2 + 1 & & \alpha_3 + 2 & & \ldots & & \alpha_{m+1} + m \\ & \beta_1 & & \beta_2 + 1 & & \ldots & & \beta_m + (m-1) & \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \lambda_2 + 1 & & \lambda_3 + 2 & & \ldots & & \lambda_{m+1} + m \\ & \mu_1 & & \mu_2 + 1 & & \ldots & & \mu_m + (m-1) & \end{pmatrix}$$

$$\psi_B(E'_C) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \lambda_1 & & \alpha_2 + \lambda_2 + 2 & & \alpha_3 + \lambda_3 + 4 & & \ldots & & \alpha_{m+1} + \lambda_{m+1} + 2m \\ & \beta_1 + \mu_1 & & \beta_2 + \mu_2 + 2 & & \ldots & & \beta_m + \mu_m + 2(m-1) & \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & d_B(E'_C) = d(\psi_B(E'_C)) \\ & = \sum \min(c, c') - \frac{m(m-1)(4m+1)}{3} \\ & = \sum_{i=1}^{m+1} (m + 1 - i + m - i + 1)(\alpha_i + \lambda_i + 2(i-1)) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{m} (m - i + m + 1 - i)(\beta_i + \mu_i + 2(i-1)) - \frac{m(m-1)(4m+1)}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{i=1}^{m+1}(m+1-i)\alpha_i + 2\sum_{i=1}^{m+1}(m+1-i)\lambda_i \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{m}(m-i)\beta_i + |\beta| + 2\sum_{i=1}^{m}(m-i)\mu_i + |\mu| \\
&= 2n(\alpha) + 2n(\beta) + |\beta| + 2n(\lambda) + 2n(\mu) + |\mu| \\
&= b_B[\alpha,\beta] + b_B[\lambda,\mu] = b_{B\times B}(A \boxtimes B)
\end{aligned}
$$

□

Proposition 2.12 *Si $\tilde{E}$ est une représentation irréductible apparaissant dans $\mathrm{Ind}_{W_a\times W_b}^{W_n} A \boxtimes B$ alors $d_B(\tilde{E}) \geq b_{B\times B}(A \boxtimes B)$ avec égalité si et seulement si $\tilde{E} = E'_C$.*

Démonstration

Par le théorème 2.8, si $\tilde{E} = [\delta,\gamma]$ apparaît dans $\mathrm{Ind}_{W_a\times W_b}^{W_n} A \boxtimes B$ alors $[\delta,\gamma] \prec [\alpha+\lambda, \beta+\mu]$. Alors $\psi_B(\tilde{E}) \prec \psi_B(E'_C)$ et donc, par le corollaire A.5, $b_{B\times B}(A\boxtimes B) = d_B(E'_C) = d(\psi_B(E'_C)) \leq d(\psi_B(\tilde{E})) = d_B(\tilde{E})$ avec égalité si et seulement si $\tilde{E} = E'_C$.

□

Ceci conclut la preuve de la proposition 2.7.

2.4 Résultat pour le type C_n

On considère un groupe réductif connexe G tel que le centre $Z(G)$ soit connexe et tel que $G/Z(G)$ soit simple de type C_n. Alors le groupe dual G^* est de type B_n. Soit C une classe spéciale isolée de G^*, $s \in T^*$ la partie semisimple d'un élément dans C et W_s le groupe de Weyl de $C_{G^*}(s)$, identifié à un sous groupe de W.

2.4.1 Cadre et résultat

Lemme 2.13 *$W_s \subset W$ est un produit direct $W_s = W'_a \times W_b$ (avec $n = a+b$) où W'_a est un groupe de Weyl de type D_a et W_b est un groupe de Weyl de type C_b (avec la convention que $W_0 = \{1\}$).*

Démonstration

Comme W est de type C_n, W^* est de type B_n. Par [2], W_s, vu comme sous groupe de W^* est de type $D_a \times B_b$ avec $a+b=n$. Donc W_s, vu comme sous groupe de W via l'identification canonique entre W et W^*, est de type $D_a \times C_b$ avec $a+b=n$.

$\square$

Soit maintenant $E_C \in \mathrm{Irr}(W_s)$ un caractère spécial. Comme W_s est un produit direct, alors on a $E_C = [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu]$ où $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W'_a)$ et $[\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W_b)$, tous deux spéciaux.

On a $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_m)$, $\lambda = (\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{m+1})$ et $\mu = (\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_m)$. Afin de faciliter les démonstrations, on notera $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Proposition 2.14 *Avec les notations de la définition 2.3, on a :*

(a) Si $\alpha = \beta$ alors $E''_C = 0$.

(b) Si $\alpha \neq \beta$ et s'il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\beta_i \neq \alpha_i$ et $\mu_i \neq \lambda_{i+1} + 1$ alors $E''_C = 0$.

2.4.2 Induction de D dans C

Il s'agit maintenant d'un paragraphe intermédiaire pour la démonstration de la proposition 2.14. Il nous faut effectivement comprendre l'induction de W_s à W : $\mathrm{Ind}_{W_s}^W$.

Soit W un groupe de Weyl de type C_n et W' un sous groupe de W de type D_n.

On souhaite expliciter l'induction de W' dans W.

Soit $\psi = [\alpha, \beta]$ une paire de partitions de somme totale n, cela paramètre une représentation irréductible de W. Posons $\overline{\psi} = [\beta, \alpha]$. Avec [20, paragraphe 4.6], on a, selon les différents cas, les résultats suivants.

• Dans le cas où $\alpha \neq \beta$, alors $\mathrm{Res}_{W'}^W \psi = \mathrm{Res}_{W'}^W \overline{\psi}$ est une représentation irréductible de W'.

Alors

$\langle \mathrm{Ind}_{W'}^W \mathrm{Res}_{W'}^W \psi, \psi \rangle_W = \langle \mathrm{Res}_{W'}^W \psi, \mathrm{Res}_{W'}^W \psi \rangle_{W'} = 1$,

$\langle \mathrm{Ind}_{W'}^W \mathrm{Res}_{W'}^W \psi, \overline{\psi} \rangle_W = \langle \mathrm{Res}_{W'}^W \psi, \mathrm{Res}_{W'}^W \overline{\psi} \rangle_{W'} = 1$,

$\langle \mathrm{Ind}_{W'}^W \mathrm{Res}_{W'}^W \psi, \mathrm{Ind}_{W'}^W \mathrm{Res}_{W'}^W \psi \rangle_W = \langle \mathrm{Res}_{W'}^W \mathrm{Ind}_{W'}^W \mathrm{Res}_{W'}^W \psi, \mathrm{Res}_{W'}^W \psi \rangle_{W'} = 2$

car $\mathrm{Ind}_{W'}^W \mathrm{Res}_{W'}^W \psi = \psi + \overline{\psi}+$autres représentations qui ont des restrictions à W' différentes de $\mathrm{Res}_{W'}^W \psi = \mathrm{Res}_{W'}^W \overline{\psi}$.

Ainsi $\mathrm{Ind}_{W'}^W \mathrm{Res}_{W'}^W \psi = \psi + \overline{\psi}$.

• Dans le cas où $\alpha = \beta$, alors $\mathrm{Res}_{W'}^{W}\psi = \psi_1 + \psi_2$ où ψ_1 et ψ_2 sont deux représentations irréductibles de W'.

Alors, pour $i = 1$ ou 2,

$\langle \mathrm{Ind}_{W'}^{W}\psi_i, \psi\rangle_W = \langle \psi_i, \mathrm{Res}_{W'}^{W}\psi\rangle_{W'} = 1$,

$\langle \mathrm{Ind}_{W'}^{W}\psi_i, \mathrm{Ind}_{W'}^{W}\psi_i\rangle_W = \langle \mathrm{Res}_{W'}^{W}\mathrm{Ind}_{W'}^{W}\psi_i, \psi_i\rangle_{W'} = 1$

car $\mathrm{Ind}_{W'}^{W}\psi_i = \psi +$autres représentations qui ont des restrictions à W' différentes des ψ_i.

Ainsi $\mathrm{Ind}_{W'}^{W}\psi_i = \psi$ et donc $\mathrm{Ind}_{W'}^{W}\mathrm{Res}_{W'}^{W}\psi = \mathrm{Ind}_{W'}^{W}\psi_1 + \mathrm{Ind}_{W'}^{W}\psi_2 = 2\psi$.

Proposition 2.15 *Soit* $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W')$ *alors*

$$\mathrm{Ind}_{W'}^{W}[\alpha, \beta] = \begin{cases} [\alpha, \beta] + [\beta, \alpha] & \text{si } \alpha \neq \beta \\ [\alpha, \alpha] & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

en remarquant que la paire de partitions dans le terme de gauche paramètre une représentation irréductible de W' alors que les paires de partitions apparaissant dans le terme de droite paramètrent des représentations irréductibles de W.

2.4.3 Démonstration de la proposition 2.14

Soient $W'_a \subset W_a$ et W_b deux sous groupes de Weyl de W_n, avec W'_a de type D_a, W_a de type C_a, W_b de type C_b, W_n de type C_n et $a + b = n$.

Soient $A = [\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W'_a)$, $B = [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W_b)$. On suppose A et B spéciaux. Quitte à échanger α et β, on peut supposer que, si $(I, J) = \phi_0[\alpha, \beta]$ et m est la longueur de I (et donc de J également) alors $J_1 \leq I_1 \leq J_2 \leq \cdots \leq J_m \leq I_m$. Ceci impose en particulier $|\beta| \leq |\alpha|$.

Soit $E'_C \in \mathrm{Irr}(W_n)$ défini dans la proposition 2.1 pour $E_C = [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W'_a \times W_b)$.

On a $\mathrm{Ind}_{W'_a \times W_b}^{W_n}[\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] = \mathrm{Ind}_{W_a \times W_b}^{W_n}\mathrm{Ind}_{W'_a \times W_b}^{W_a \times W_b}[\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu]$, ce qui vaut d'après la section 2.4.2, selon les cas :

• Si $\alpha \neq \beta$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{W'_a\times W_b}^{W_n}[\alpha,\beta]\boxtimes[\lambda,\mu]\\
&=\mathrm{Ind}_{W_a\times W_b}^{W_n}([\alpha,\beta]\boxtimes[\lambda,\mu]+[\beta,\alpha]\boxtimes[\lambda,\mu])\\
&=\mathrm{Ind}_{W_a\times W_b}^{W_n}[\alpha,\beta]\boxtimes[\lambda,\mu]+\mathrm{Ind}_{W_a\times W_b}^{W_n}[\beta,\alpha]\boxtimes[\lambda,\mu]\\
&=[\alpha+\lambda,\beta+\mu]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\lneqq[\alpha+\lambda,\beta+\mu]\\
&+[\beta+\lambda,\alpha+\mu]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\lneqq[\beta+\lambda,\alpha+\mu]
\end{aligned}$$

- Si $\alpha=\beta$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{W'_a\times W_b}^{W_n}[\alpha,\alpha]\boxtimes[\lambda,\mu]\\
&=\mathrm{Ind}_{W_a\times W_b}^{W_n}[\alpha,\alpha]\boxtimes[\lambda,\mu]\\
&=[\alpha+\lambda,\alpha+\mu]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\lneqq[\alpha+\lambda,\alpha+\mu]
\end{aligned}$$

Proposition 2.16 *E'_C est paramétré par $[\alpha+\lambda,\beta+\mu]$.*

Démonstration

Tout d'abord, $b_C[\alpha+\lambda,\beta+\mu]=b_C[\alpha,\beta]+b_C[\lambda,\mu]=b_D[\alpha,\beta]+b_C[\lambda,\mu]=b_{D\times C}[\alpha,\beta]\boxtimes[\lambda,\mu]$. Ensuite, on différentie les cas.

- Si $\beta=\alpha$, le résultat est clair.
- Si $\beta\neq\alpha$, il suffit de voir $b_C[\alpha+\lambda,\beta+\mu]<b_C[\beta+\lambda,\alpha+\mu]$.

Mais on a $b_C[\alpha+\lambda,\beta+\mu]=b_C[\alpha,\beta]+b_C[\lambda,\mu]=b_C[\beta,\alpha]-|\alpha|+|\beta|+b_C[\lambda,\mu]=b_C[\beta+\lambda,\alpha+\mu]-|\alpha|+|\beta|<b_C[\beta+\lambda,\alpha+\mu]$. Effectivement, on a supposé que, si $(I,J)=\phi_0[\alpha,\beta]$ et m est la longueur de I (et donc de J également) alors $J_1\leq I_1\leq J_2\leq\cdots\leq J_m\leq I_m$, donc, pour tout $i\in\{1,\ldots,m\}$, $\beta_i\leq\alpha_i$ avec une égalité stricte pour un certain i car $\alpha\neq\beta$, donc $|\alpha|>|\beta|$.

□

Remarque 2.17 Si $\alpha\neq\beta$, on note E''_0 la représentation paramétrée par $[\beta+\lambda,\alpha+\mu]$.

Proposition 2.18 *On a $d_C(E'_C)=b_{D\times C}(A\boxtimes B)$.*

Démonstration

Cela découle des propositions 2.1 et 2.16. Cependant, nous allons tout de même faire le calcul explicite.

Comme A est supposé spécial, $\phi_0(A)$ est distingué donc, si α et β ont même longueur m, on a, pour tout $i \in \{2, \dots, m\}$, $\alpha_{i-1}+i-2 \leq \beta_i+i-1 \leq \alpha_i+i-1$ et $\beta_1 \leq \alpha_1$. Maintenant, si on rajoute un zéro à α (sans le réindexer, mais en posant $\alpha_0 = 0$), on a, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha_{i-1}+i-1 \leq \beta_i+i \leq \alpha_i + i$.

Comme B est supposé spécial, $\phi_1(B)$ est distingué donc, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda_i + i - 1 \leq \mu_i + i - 1 \leq \lambda_{i+1} + i$.

Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha_{i-1} + \lambda_i + 2(i-1) \leq \beta_i + \mu_i + 2i - 1 \leq \alpha_i + \lambda_{i+1} + 2i$ c'est-à-dire $\psi_C(E'_C)$ est distingué.

Effectivement, soit D le symbole obtenu en ajoutant 1 à toutes les entrées de $\phi_0(A)$ et en rajoutant un zéro au début de la première ligne du résultat. On a $\psi_C(E'_C) = D + \phi_1(B)$.

$$\phi_0(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2+1 & \alpha_3+2 & \dots & \alpha_m+(m-1) \\ \beta_1 & \beta_2+1 & \beta_3+2 & \dots & \beta_m+(m-1) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & \alpha_1+1 & & \alpha_2+2 & & \alpha_3+3 & & \dots & & \alpha_m+m \\ & \beta_1+1 & & \beta_2+2 & & \beta_3+3 & & \dots & & \beta_m+m & \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \lambda_2+1 & & \lambda_3+2 & & \dots & & \lambda_{m+1}+m \\ & \mu_1 & & \mu_2+1 & & \dots & & \mu_m+(m-1) & \end{pmatrix}$$

$$\psi_C(E'_C) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \alpha_1+\lambda_2+2 & & \alpha_2+\lambda_3+4 & & \dots & & \alpha_m+\lambda_{m+1}+2m \\ & \beta_1+\mu_1+1 & & \beta_2+\mu_2+3 & & \dots & & \beta_m+\mu_m+2m-1 & \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & d_C(E'_C) = d(\psi_C(E'_C)) \\ & = \sum \min(c, c') - \frac{m(4m^2-1)}{3} \\ & = \sum_{i=1}^{m+1} (m+1-i+m-i+1)(\alpha_{i-1}+\lambda_i+2(i-1)) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{m} (m-i+m+1-i)(\beta_i+\mu_i+2i-1) - \frac{m(4m^2-1)}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sum_{i=1}^{m+1}(m+1-i)\alpha_{i-1} + 2\sum_{i=1}^{m+1}(m+1-i)\lambda_i \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{m}(m-i)\beta_i + |\beta| + 2\sum_{i=1}^{m}(m-i) + |\mu| \\
&= 2n(\alpha) + 2n(\beta) + |\beta| + 2n(\lambda) + 2n(\mu) + |\mu| \\
&= b_D[\alpha,\beta] + b_C[\lambda,\mu] = b_{D\times C}(A \boxtimes B)
\end{aligned}$$

En effet, par le choix fait sur α et β, on a $|\beta| \leq |\alpha|$.
□

Proposition 2.19 *On a $d_C(E'_C) \leq d_C(E''_0)$ avec égalité si et seulement si, pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$, $\alpha_i = \beta_i$ ou $\mu_i = \lambda_{i+1}+1$.*

Démonstration

Si $\alpha = \beta$, il n'y a rien à démontrer.

Supposons donc $\alpha \neq \beta$.

On sait, par la démonstration de la proposition précédente, que $\psi_C(E'_C)$ est distingué, d'où un calcul explicite de $d(\psi_C(E'_C))$. Etudions le cas de $d(\psi_C(E''_0))$.

Comme A est supposé spécial, $\phi_0(A)$ est distingué donc, pour tout $i \in \{1,\dots,m-1\}$, $\beta_i+i-1 \leq \alpha_i+i-1 \leq \beta_{i+1}+i$ et $\beta_m+m-1 \leq \alpha_m+m-1$.

Comme B est supposé spécial, $\phi_1(B)$ est distingué donc, pour tout $i \in \{1,\dots,m-1\}$, $\mu_i+i-1 \leq \lambda_{i+1}+i \leq \mu_{i+1}+i$.

Ainsi, pour tout $i \in \{1,\dots,m-1\}$, $\beta_i+\lambda_{i+1}+2i-1 \leq \alpha_i+\mu_{i+1}+2i-1 < \alpha_{i+1}+\mu_{i+1}+2(i+1)-1$ et $\alpha_i+\mu_i+2(i-1) \leq \beta_{i+1}+\lambda_{i+1}+2i < \beta_{i+1}+\lambda_{i+2}+2(i+1)$, c'est-à-dire $\beta_i+\lambda_{i+1}+2i$ et $\alpha_i+\mu_i+2i-1$ sont inférieurs à $\beta_{i+1}+\lambda_{i+2}+2(i+1)$ et à $\alpha_{i+1}+\mu_{i+1}+2(i+1)-1$, donc on peut expliciter le calcul de $d(\psi_C(E''_0))$.

$$\begin{aligned}
&d_C(E''_0) - d_C(E'_C) = d(\psi_C[\beta+\lambda,\alpha+\mu]) - d(\psi_C[\alpha+\lambda,\beta+\mu]) \\
&= \sum_{i=1}^{m+1}(m+1-i+m-i+1)(\beta_{i-1}+\lambda_i+2(i-1)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}(m-i+m-i)(\alpha_i+\mu_i+2i-1) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\min(\alpha_i+\mu_i+2i-1, \beta_i+\lambda_{i+1}+2i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{m+1}(m+1-i+m-i+1)(\alpha_{i-1}+\lambda_i+2(i-1)) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{m}(m-i+m+1-i)(\beta_i+\mu_i+2i-1) \\
&=\sum_{i=1}^{m+1}(2m+2-2i)\beta_{i-1}+\sum_{i=1}^{m+1}(2m+2-2i)(\lambda_i+2(i-1)) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{m}(2m-2i)\alpha_i+\sum_{i=1}^{m}(2m-2i)(\mu_i+2i-1) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{m}\min(\alpha_i+\mu_i+2i-1,\beta_i+\lambda_{i+1}+2i) \\
&-\sum_{i=1}^{m+1}(2m+2-2i)\alpha_{i-1}-\sum_{i=1}^{m+1}(2m+2-2i)(\lambda_i+2(i-1)) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{m}(2m+1-2i)\beta_i-\sum_{i=1}^{m}(2m+1-2i)(\mu_i+2i-1) \\
&=\sum_{i=1}^{m}(2m-2i)\beta_i+\sum_{i=1}^{m+1}(2m+2-2i)(\lambda_i+2(i-1)) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{m}(2m-2i)\alpha_i+\sum_{i=1}^{m}(2m-2i)(\mu_i+2i-1) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{m}\min(\alpha_i+\mu_i+2i-1,\beta_i+\lambda_{i+1}+2i) \\
&-\sum_{i=1}^{m}(2m-2i)\alpha_i-\sum_{i=1}^{m+1}(2m+2-2i)(\lambda_i+2(i-1)) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{m}(2m+1-2i)\beta_i-\sum_{i=1}^{m}(2m+1-2i)(\mu_i+2i-1) \\
&=\sum_{i=1}^{m}\left(\min(\alpha_i+\mu_i+2i-1,\beta_i+\lambda_{i+1}+2i)-(\beta_i+\mu_i+2i-1)\right) \\
&=\sum_{i=1}^{m}\left(\min(\alpha_i+\mu_i,\beta_i+\lambda_{i+1}+1)-(\beta_i+\mu_i)\right)=\mathcal{E}
\end{aligned}
$$

On a $\mathcal{E}\geq 0$, car, pour tout $i\in\{1,\ldots,m\}$, on a $\beta_i\leq\alpha_i$ donc $\beta_i+\mu_i\leq\alpha_i+\mu_i$ et $\mu_i\leq\lambda_{i+1}+1$ donc $\beta_i+\mu_i\leq\beta_i+\lambda_{i+1}+1$. Par ailleurs, on a l'égalité si et seulement si $\min(\alpha_i+\mu_i, \beta_i+\lambda_{i+1}+1) = \beta_i+\mu_i$, soit si et seulement si, pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$, $\alpha_i = \beta_i$ ou $\mu_i = \lambda_{i+1}+1$.

$\square$

Proposition 2.20 *Si $\tilde{E}$ est une représentation irréductible, différente de E'_C et de E''_0, apparaissant dans $\mathrm{Ind}_{W'_a \times W_b}^{W_n} A \boxtimes B$ alors $d_C(\tilde{E}) > b_{D\times C}(A \boxtimes B)$.*

Démonstration

Si $\tilde{E} = [\delta,\gamma]$ est comme dans l'énoncé alors $[\delta,\gamma] \precneqq [\alpha+\lambda, \beta+\mu]$ ou $[\delta,\gamma] \precneqq [\beta+\lambda, \alpha+\mu]$. Alors, par le corollaire A.5, dans le premier cas, $d_C[\delta,\gamma] > d_C[\alpha+\lambda,\beta+\mu] = d_C(E'_C) = b_{D\times C}(A\boxtimes B)$ et dans le second cas, $d_C[\delta,\gamma] > d_C[\beta+\lambda,\alpha+\mu] = d_C(E''_0) \geq d_C(E'_C) = b_{D\times C}(A\boxtimes B)$ (proposition précédente).

$\square$

Corollaire 2.21 *Dans le cas C_n, si A est dégénéré $E''_C = 0$ et si A ne l'est pas alors $E''_C = 0$ équivaut à $d_C(E''_0) > d_C(E'_C)$, ce qui équivaut à : il existe $i \in \{1,\dots,m\}$ tel que $\beta_i \neq \alpha_i$ et $\mu_i \neq \lambda_{i+1}+1$.*

Si cette condition n'est pas remplie alors $E''_C = E''_0$.

Ceci prouve la proposition 2.14.

2.5 Résultat pour le type D_n

On considère un groupe réductif connexe G tel que le centre $Z(G)$ soit connexe et tel que $G/Z(G)$ soit simple de type D_n. Alors le groupe dual G^* est de type D_n. Soit C une classe spéciale isolée de G^*, $s \in T^*$ la partie semisimple d'un élément dans C et W_s le groupe de Weyl de $C_{G^*}(s)$, identifié à un sous groupe de W.

2.5.1 Cadre et résultat

Lemme 2.22 *$W_s \subset W$ est un produit direct $W_s = W'_a \times W'_b$ (avec $n = a+b$) où W'_a est un groupe de Weyl de type D_a et W'_b est un groupe de Weyl de type D_b (avec la convention que $W_0 = \{1\}$).*

Démonstration

Comme W est de type D_n, W^* est de type D_n. Par [2], W_s, vu comme sous groupe de W^* est de type $D_a \times D_b$ avec $a+b=n$. Donc W_s, vu comme sous groupe de W via l'identification canonique entre W et W^*, est de type $D_a \times D_b$ avec $a+b=n$.

$\square$

Soit maintenant $E_C \in \mathrm{Irr}(W_s)$ un caractère spécial. Comme W_s est un produit direct, alors on a $E_0 = [\alpha,\beta] \boxtimes [\lambda,\mu]$ où $[\alpha,\beta] \in \mathrm{Irr}(W'_a)$ et $[\lambda,\mu] \in \mathrm{Irr}(W'_b)$, tous deux spéciaux.

On a $\alpha = (\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_m)$, $\lambda = (\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m)$ et $\mu = (\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_m)$.

Proposition 2.23 *Avec les notations de la définition 2.3, on a :*

(a) Si $\alpha = \beta$ ou $\lambda = \mu$ alors $E''_C = 0$.

(b) Si $\alpha \neq \beta$, $\lambda \neq \mu$ et s'il existe $i \in \{1,\ldots,m\}$ tel que $\beta_i \neq \alpha_i$ et $\mu_i \neq \lambda_i$ alors $E''_C = 0$.

2.5.2 Induction de $D \times D$ dans D

Il s'agit maintenant d'un paragraphe intermédiaire pour la démonstration de la proposition 2.23. Il nous faut effectivement comprendre l'induction de W_s à W : $\mathrm{Ind}_{W_s}^{W}$.

Soient $W'_a \subset W_a$ et $W'_b \subset W_b$ deux sous groupes de Weyl de $W'_n \subset W_n$ avec W'_i de type D_i, W_i de type B_i pour $i = a$, b ou n et $a+b=n$.

Soient $[\alpha,\beta] \in \mathrm{Irr}(W'_a)$ et $[\lambda,\mu] \in \mathrm{Irr}(W'_b)$, on souhaite expliciter l'induction de $[\alpha,\beta] \boxtimes [\lambda,\mu] \in \mathrm{Irr}(W'_a \times W'_b)$ à W'_n.

Posons $\psi' = \mathrm{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W'_n}[\alpha,\beta] \boxtimes [\lambda,\mu]$ et $\psi = \mathrm{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W_n}[\alpha,\beta] \boxtimes [\lambda,\mu] = \mathrm{Ind}_{W_a \times W_b}^{W_n}\mathrm{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W_a \times W_b}[\alpha,\beta] \boxtimes [\lambda,\mu]$.

ψ est explicitement connu par les deux paragraphes 2.4.2 et 2.3.2, on cherche donc ψ' en fonction de ψ ; plus précisément, on cherche cela en termes de symboles.

Par transitivité de l'induction, on a $\psi = \mathrm{Ind}_{W'_n}^{W_n}\psi'$.

ψ' est somme de représentations irréductibles : $\psi' = \sum \Psi'_i + \sum \Theta'_j$ où les Ψ'_i sont non dégénérés et les Θ'_j sont dégénérés.

On a :

$\mathrm{Ind}_{W'_n}^{W_n}\psi' = \sum \mathrm{Ind}_{W'_n}^{W_n}\Psi'_i + \sum \mathrm{Ind}_{W'_n}^{W_n}\Theta'_j = \sum(\Psi_i + \overline{\Psi_i}) + \sum \Theta_j$

avec Ψ_i est la représentation de W_n correspondant à $[\gamma,\delta]$ et $\overline{\Psi_i}$ celle correspondant à $[\delta,\gamma]$ si Ψ'_i correspond à $[\gamma,\delta]$ et Θ_j est la représentation de W_n correspondant à $[\delta,\delta]$ si Θ'_j correspond à $[\delta,\delta]$.

Alors $\mathrm{Res}_{W'_n}^{W_n}\Theta_j = \Theta_j^1 + \Theta_j^2$ avec, en termes de symboles, Θ_j^1 et Θ_j^2 paramétrées par le même symbole dégénéré $[\delta, \delta]$.

Donc

$\mathrm{Res}_{W'_n}^{W_n}\psi = \mathrm{Res}_{W'_n}^{W_n}\mathrm{Ind}_{W'_n}^{W_n}\psi' = 2\sum \Psi'_i + \sum(\Theta_j^1 + \Theta_j^2) = \left(\sum \Psi'_i + \sum \Theta_j^1\right) + \left(\sum \Psi'_i + \sum \Theta_j^2\right)$

Ce qui donne, en termes de symboles, $2\psi'$.

Ainsi, en termes de symboles, on induit $[\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu]$ à $W_a \times W_b$ avec la section 2.4.2, puis on induit le résultat à W_n avec la section 2.3.2, on réduit cette expression en confondant $[\delta, \gamma]$ et $[\gamma, \delta]$. On obtient une combinaison linéaire de symboles à coefficients entiers naturels pairs dont il suffit de diviser tous les coefficients par 2 pour obtenir la décomposition en termes de symboles de $\mathrm{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W'_n}[\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu]$.

2.5.3 Démonstration de la proposition 2.23

Soient $W'_a \subset W_a$ et $W'_b \subset W_b$ deux sous groupes de Weyl de $W'_n \subset W_n$, avec W'_i de type D_i, W_i de type B_i avec $i = a$, b ou n et $a + b = n$.

Soient $A = [\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W'_a)$, $B = [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W'_b)$. On suppose A et B spéciaux. Quitte à échanger α et β (respectivement λ et μ), on peut supposer que, si $(I, J) = \phi_0[\alpha, \beta]$ (respectivement $(I, J) = \phi_0[\lambda, \mu]$) et m est la longueur de I (et donc de J également) alors $J_1 \leq I_1 \leq J_2 \leq \cdots \leq J_m \leq I_m$. Ceci impose en particulier $|\beta| \leq |\alpha|$ et $|\mu| \leq |\lambda|$.

Soit $E'_C \in \mathrm{Irr}(W'_n)$ défini dans la proposition 2.1 pour $E_C = [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W'_a \times W'_b)$.

On a $\mathrm{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W_n}[\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] = \mathrm{Ind}_{W_a \times W_b}^{W_n}\mathrm{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W_a \times W_b}[\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu]$, ce qui vaut d'après les sections 2.4.2 et 2.3.2, selon les cas :

- Si $\alpha \neq \beta$ et $\lambda \neq \mu$, alors

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{W'_a\times W'_b}^{W_n}[\alpha,\beta]\boxtimes[\lambda,\mu]\\
&=\mathrm{Ind}_{W_a\times W_b}^{W_n}([\alpha,\beta]\boxtimes[\lambda,\mu]+[\beta,\alpha]\boxtimes[\lambda,\mu]+[\alpha,\beta]\boxtimes[\mu,\lambda]+[\beta,\alpha]\boxtimes[\mu,\lambda])\\
&=[\alpha+\lambda,\beta+\mu]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\precneqq[\alpha+\lambda,\beta+\mu]\\
&+[\beta+\lambda,\alpha+\mu]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\precneqq[\beta+\lambda,\alpha+\mu]\\
&+[\alpha+\mu,\beta+\lambda]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\precneqq[\alpha+\mu,\beta+\lambda]\\
&+[\beta+\mu,\alpha+\lambda]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\precneqq[\beta+\mu,\alpha+\lambda]
\end{aligned}
$$

On en déduit avec la paragraphe 2.5.2 :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{W'_a\times W'_b}^{W'_n}[\alpha,\beta]\boxtimes[\lambda,\mu]\\
&=[\alpha+\lambda,\beta+\mu]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\precneqq[\alpha+\lambda,\beta+\mu]\\
&+[\beta+\lambda,\alpha+\mu]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\precneqq[\beta+\lambda,\alpha+\mu]
\end{aligned}
$$

• Si un seul des deux symboles A ou B est dégénéré (A par exemple) alors

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{W'_a\times W'_b}^{W_n}[\alpha,\beta]\boxtimes[\lambda,\mu]\\
&=\mathrm{Ind}_{W_a\times W_b}^{W_n}([\alpha,\beta]\boxtimes[\lambda,\mu]+[\alpha,\beta]\boxtimes[\mu,\lambda])\\
&=[\alpha+\lambda,\beta+\mu]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\precneqq[\alpha+\lambda,\beta+\mu]\\
&+[\alpha+\mu,\beta+\lambda]\\
&\quad+\text{somme de représentations }[\delta,\gamma]\text{ avec }[\delta,\gamma]\precneqq[\alpha+\mu,\beta+\lambda]
\end{aligned}
$$

On en déduit avec la paragraphe 2.5.2 :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W'_n} [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \\
&= [\alpha + \lambda, \beta + \mu] \\
&\quad + \text{somme de représentations } [\delta, \gamma] \text{ avec } [\delta, \gamma] \precneqq [\alpha + \lambda, \beta + \mu]
\end{aligned}$$

• Si les deux symboles A et B sont dégénérés alors

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W_n} [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \\
&= \operatorname{Ind}_{W_a \times W_b}^{W_n} [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \\
&= [\alpha + \lambda, \beta + \mu] \\
&\quad + \text{somme de représentations } [\delta, \gamma] \text{ avec } [\delta, \gamma] \precneqq [\alpha + \lambda, \beta + \mu]
\end{aligned}$$

On en déduit avec la paragraphe 2.5.2 :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W'_n} [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \\
&= [\alpha + \lambda, \beta + \mu] \\
&\quad + \text{somme de représentations } [\delta, \gamma] \text{ avec } [\delta, \gamma] \precneqq [\alpha + \lambda, \beta + \mu]
\end{aligned}$$

• Ainsi on peut résumer que si A ou B est dégénéré alors

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W'_n} [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \\
&= [\alpha + \lambda, \beta + \mu] \\
&\quad + \text{somme de représentations } [\delta, \gamma] \text{ avec } [\delta, \gamma] \precneqq [\alpha + \lambda, \beta + \mu]
\end{aligned}$$

Proposition 2.24 *E'_C est paramétré par* $[\alpha + \lambda, \beta + \mu]$.

Démonstration

• Si A ou B est dégénéré, le résultat est clair.

• Sinon, il suffit de voir $b_D[\alpha + \lambda, \beta + \mu] < b_D[\beta + \lambda, \alpha + \mu]$.

Mais on a $b_D[\alpha + \lambda, \beta + \mu] = b_D[\alpha, \beta] + b_D[\lambda, \mu] = b_D[\beta, \alpha] - |\alpha| + |\beta| + b_D[\lambda, \mu] = b_D[\beta + \lambda, \alpha + \mu] - |\alpha| + |\beta| < b_D[\beta + \lambda, \alpha + \mu]$. Effectivement, on a supposé que, si $(I, J) = \phi_0[\alpha, \beta]$ et m est la longueur de I (et donc de J également) alors $J_1 \leq I_1 \leq J_2 \leq \cdots \leq J_m \leq I_m$, donc, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\beta_i \leq \alpha_i$ avec une égalité stricte pour un certain i car $\alpha \neq \beta$, donc $|\alpha| > |\beta|$.

□

Remarque 2.25 Si les deux symboles A et B sont non dégénérés, on note E''_0 la représentation paramétrée par $[\beta+\lambda, \alpha+\mu]$.

Proposition 2.26 *On a* $d_D(E'_C) = b_{D\times D}(A \boxtimes B)$.

Démonstration

Cela découle des propositions 2.1 et 2.24. Cependant, nous allons tout de même faire le calcul explicite.

Comme A est supposé spécial, $\phi_0(A)$ est distingué donc, si α et β ont même longueur m, on a, pour tout $i \in \{2,\ldots,m\}$, $\alpha_{i-1}+i-2 \leq \beta_i+i-1 \leq \alpha_i+i-1$ et $\beta_1 \leq \alpha_1$.

Comme B est supposé spécial, $\phi_0(B)$ est distingué donc, si λ et μ ont même longueur m, on a, pour tout $i \in \{2,\ldots,m\}$, $\lambda_{i-1}+i-2 \leq \mu_i+i-1 \leq \lambda_i+i-1$ et $\mu_1 \leq \lambda_1$.

Ainsi, pour tout $i \in \{2,\ldots,m\}$, $\alpha_{i-1}+\lambda_{i-1}+2(i-2) \leq \beta_i+\mu_i+2(i-1) \leq \alpha_i+\lambda_i+2(i-1)$ et $\beta_1+\mu_1 \leq \alpha_1+\lambda_1$, c'est-à-dire $\psi_D(E'_C)$ est distingué.

Effectivement, $\psi_D(E'_C) = \phi_0(A)+\phi_0(B)$.

$$\phi_0(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2+1 & \alpha_3+2 & \ldots & \alpha_m+(m-1) \\ \beta_1 & \beta_2+1 & \beta_3+2 & \ldots & \beta_m+(m-1) \end{pmatrix}$$

$$\phi_0(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2+1 & \lambda_3+2 & \ldots & \lambda_m+(m-1) \\ \mu_1 & \mu_2+1 & \mu_3+2 & \ldots & \mu_m+(m-1) \end{pmatrix}$$

$$\psi_D(E'_C) = \begin{pmatrix} \alpha_1+\lambda_1 & \alpha_2+\lambda_2+2 & \alpha_3+\lambda_3+4 & \ldots & \alpha_m+\lambda_m+2(m-1) \\ \beta_1+\mu_1 & \beta_2+\mu_2+2 & \beta_3+\mu_3+4 & \ldots & \beta_m+\mu_m+2(m-1) \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& d_D(E'_C) = d(\psi_D(E'_C)) \\
& = \sum_m \min(c,c') - \frac{m(m-1)(4m-5)}{3} \\
& = \sum_{i=1}^{m} (m-i+m-i)(\alpha_i+\lambda_i+2(i-1)) \\
& \quad + \sum_{i=1}^{m} (m-i+m+1-i)(\beta_i+\mu_i+2(i-1)) - \frac{m(m-1)(4m-5)}{3} \\
& = 2\sum_{i=1}^{m}(m-i)\alpha_i + 2\sum_{i=1}^{m}(m-i)\lambda_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+2\sum_{i=1}^{m}(m-i)\beta_i+|\beta|+2\sum_{i=1}^{m}(m-i)\mu_i+|\mu| \\
&= 2n(\alpha)+2n(\beta)+|\beta|+2n(\lambda)+2n(\mu)+|\mu| \\
&= b_D[\alpha,\beta]+b_D[\lambda,\mu]=b_{D\times D}(A\boxtimes B)
\end{aligned}$$

En effet, par les choix faits sur α, β, λ et μ, on a $|\beta| \leq |\alpha|$ et $|\mu| \leq |\lambda|$.
$\square$

Proposition 2.27 *On a $d_D(E'_C) \leq d_D(E''_0)$ avec égalité si et seulement si, pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\alpha_i = \beta_i$ ou $\lambda_i = \mu_i$.*

Démonstration
Si A ou B est dégénéré, il n'y a rien à démontrer.
Supposons donc que A et B sont non dégénérés.
On sait, par la démonstration de la proposition précédente, que $\psi_D(E'_C)$ est distingué, d'où un calcul explicite de $d(\psi_D(E'_C))$. Etudions le cas de $d(\psi_D(E''_0))$.
Comme A est supposé spécial, $\phi_0(A)$ est distingué donc, pour tout $i \in \{1,\ldots,m-1\}$, $\beta_i+i-1 \leq \alpha_i+i-1 \leq \beta_{i+1}+i$ et $\beta_m+m-1 \leq \alpha_m+m-1$.
Comme B est supposé spécial, $\phi_0(B)$ est distingué donc, pour tout $i \in \{1,\ldots,m-1\}$, $\mu_i+i-1 \leq \lambda_i+i-1 \leq \mu_{i+1}+i$ et $\mu_m+m-1 \leq \lambda_m+m-1$.
Ainsi, pour tout $i \in \{1,\ldots,m-1\}$, $\beta_i+\lambda_i+2(i-1) \leq \alpha_i+\mu_{i+1}+2i-1 < \alpha_{i+1}+\mu_{i+1}+2i$ et $\alpha_i+\mu_i+2(i-1) \leq \beta_{i+1}+\lambda_i+2i-1 < \beta_{i+1}+\lambda_{i+1}+2(i-1)$, donc on peut expliciter le calcul de $d(\psi_D(E''_0))$.

$$\begin{aligned}
&d_D(E''_0)-d_D(E'_C) = d(\psi_D[\beta+\lambda,\alpha+\mu])-d(\psi_D[\alpha+\lambda,\beta+\mu]) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(2m-2i)(\beta_i+\lambda_i+2(i-1)) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{m}(2m-2i)(\alpha_i+\mu_i+2(i-1)) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{m}\min(\alpha_i+\mu_i+2(i-1),\beta_i+\lambda_i+2(i-1)) \\
&-\sum_{i=1}^{m}(2m-2i)(\alpha_i+\lambda_i+2(i-1)) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{m}(2m-2i+1)(\beta_i+\mu_i+2(i-1))
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\min(\alpha_i + \mu_i + 2(i-1), \beta_i + \lambda_i + 2(i-1)) - (\beta_i + \mu_i + 2(i-1)))$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (\min(\alpha_i + \mu_i, \beta_i + \lambda_i) - (\beta_i + \mu_i)) = \mathcal{E}$$

On a $\mathcal{E} \geq 0$, car, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on a $\beta_i \leq \alpha_i$ et $\mu_i \leq \lambda_i$. Par ailleurs, on a l'égalité si et seulement si $\min(\alpha_i + \mu_i, \beta_i + \lambda_i) = \beta_i + \mu_i$, soit si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\alpha_i = \beta_i$ ou $\lambda_i = \mu_i$.
□

Proposition 2.28 *Si $\tilde{E}$ est une représentation irréductible, différente de E'_C et de E''_0, apparaissant dans $\mathrm{Ind}_{W'_a \times W'_b}^{W'_n} A \boxtimes B$ alors $d_D(\tilde{E}) > b_{D\times D}(A \boxtimes B)$.*

Démonstration
Si $\tilde{E} = [\delta, \gamma]$ est comme dans l'énoncé alors $[\delta, \gamma] \precneqq [\alpha + \lambda, \beta + \mu]$ ou $[\delta, \gamma] \precneqq [\beta + \lambda, \alpha + \mu]$. Alors, par le corollaire A.5, dans le premier cas, $d_D[\delta, \gamma] > d_D[\alpha + \lambda, \beta + \mu] = d_D(E'_C) = b_{D\times D}(A \boxtimes B)$ et dans le second cas, $d_D[\delta, \gamma] > d_D[\beta + \lambda, \alpha + \mu] = d_D(E''_0) \geq d_D(E'_C) = b_{D\times D}(A \boxtimes B)$.
□

Corollaire 2.29 *Dans le cas D_n, si A ou B est dégénéré $E''_C = 0$ et sinon alors $E''_C = 0$ équivaut à $d_D(E''_0) > d_D(E'_C)$, ce qui équivaut à : il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\beta_i \neq \alpha_i$ et $\mu_i \neq \lambda_i$.*
Si cette condition n'est pas remplie alors $E''_C = E''_0$.

Ceci prouve la proposition 2.14.

2.6 Les types exceptionnels

Pour déterminer les types possibles pour W_s dans W^*, on utilise toujours [5, proposition 2.3.4]. Afin de connaître le type de W_s dans W (via l'identification entre W et W^*), il convient d'ajouter des "tilde" là où il n'y en a pas et de les ôter là où ils sont présents (cela n'interviendra que pour les types G_2 et F_4). Effectivement, l'identification entre W et W^* échange les racines courtes et les racines longues et un "tilde" sur le type A correspond à une composante de type A formée de racines courtes.

Nous allons donner, pour chaque type exceptionnel, des tables indiquant les cas où $E''_C \neq 0$, que l'on a déterminé à l'aide du système `CHEVIE` [12] sous le logiciel `GAP`. Nous allons également donner dans ces tables les groupes $\mathcal{G}_C$ ($\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ où $\mathcal{F}$ est la famille contenant E_C) et $A(u)$ ($u \in O$, O classe unipotente associée à E'_C via la correspondance de Springer) correspondant à C à l'aide des résultats du chapitre 1 car cela nous intéressera au chapitre suivant.

On rappelle que les diagrammes de Dynkin sont numérotés comme cela est indiqué en page 16.

Table 2.30 $E''_C \neq 0$ en type G_2

Type de W_s	E_C	E'_C	E''_C	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
$A_1 \times \tilde{A}_1$	$11 \boxtimes 2$	$\phi_{2,1}$	$\phi'_{1,3}$	1	$\mathfrak{S}_3$

Table 2.31 $E''_C \neq 0$ en type F_4

Type de W_s	E_C	E'_C	E''_C	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
C_4	$[2, 11]$	12	6_2	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_4$
$\tilde{A}_3 \times A_1$	$22 \boxtimes 2$	9_1	2_1	1	$\mathfrak{S}_2$
	$4 \boxtimes 11$	4_2	2_3	1	$\mathfrak{S}_2$
$A_2 \times \tilde{A}_2$	$111 \boxtimes 12$	12	9_3	1	$\mathfrak{S}_4$
	$12 \boxtimes 3$	4_2	2_3	1	$\mathfrak{S}_2$
$B_3 \times \tilde{A}_1$	$[11, 1] \boxtimes 11$	12	9_3	1	$\mathfrak{S}_4$
	$[1, 11] \boxtimes 2$	12	$9_3 + 6_2$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_4$

Table 2.32 $E''_C \neq 0$ en type E_6

Type de W_s	E_C	E'_C	E''_C	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
$A_5 \times A_1$	$1122 \boxtimes 2$	80_s	90_s	1	$\mathfrak{S}_3$
	$1113 \boxtimes 11$	80_s	90_s	1	$\mathfrak{S}_3$
	$114 \boxtimes 2$	30_p	15_p	1	$\mathfrak{S}_2$
$A_2 \times A_2 \times A_2$	$111 \boxtimes 3 \boxtimes 3$	30_p	15_p	1	$\mathfrak{S}_2$
	$3 \boxtimes 111 \boxtimes 3$	30_p	15_p	1	$\mathfrak{S}_2$
	$3 \boxtimes 3 \boxtimes 111$	30_p	15_p	1	$\mathfrak{S}_2$

Table 2.33 $E''_C \neq 0$ en type E_7

Type de W_s	E_C	E'_C	E''_C	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
$D_6 \times A_3$	$[11, 1111] \boxtimes 2$	315_a	280_a	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[12, 12] \boxtimes 2$	$315'_a$	$280'_a$	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[2, 112] \boxtimes 2$	405_a	189_a	1	$\mathfrak{S}_2$
	$[11, 13] \boxtimes 11$	$315'_a$	$280'_a$	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[1, 113] \boxtimes 2$	$315'_a$	$280'_a$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$
A_7	11123	$512'_a$	512_a	1	$\mathfrak{S}_2$
	11114	420_a	$336'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	1124	$315'_a$	$280'_a$	1	$\mathfrak{S}_3$
	125	120_a	$105'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	116	$56'_a$	21_a	1	$\mathfrak{S}_2$
$A_5 \times A_2$	$11112 \boxtimes 12$	$512'_a$	512_a	1	$\mathfrak{S}_2$
	$11112 \boxtimes 3$	420_a	$336'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$1113 \boxtimes 12$	$315'_a$	$280'_a$	1	$\mathfrak{S}_3$
	$123 \boxtimes 3$	120_a	$105'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$114 \boxtimes 12$	120_a	$105'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$114 \boxtimes 3$	$56'_a$	21_a	1	$\mathfrak{S}_2$
	$15 \boxtimes 111$	120_a	$105'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$6 \boxtimes 111$	$56'_a$	21_a	1	$\mathfrak{S}_2$
$A_3 \times A_3 \times A_1$	$1111 \boxtimes 13 \boxtimes 2$	$315'_a$	$280'_a$	1	$\mathfrak{S}_3$
	$112 \boxtimes 13 \boxtimes 2$	120_a	$105'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$112 \boxtimes 4 \boxtimes 11$	120_a	$105'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$112 \boxtimes 4 \boxtimes 2$	$56'_a$	21_a	1	$\mathfrak{S}_2$
	$22 \boxtimes 22 \boxtimes 11$	$189'_b$	$15'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$13 \boxtimes 1111 \boxtimes 2$	$315'_a$	$280'_a$	1	$\mathfrak{S}_3$
	$13 \boxtimes 112 \boxtimes 2$	120_a	$105'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$4 \boxtimes 112 \boxtimes 11$	120_a	$105'_a$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$4 \boxtimes 112 \boxtimes 2$	$56'_a$	21_a	1	$\mathfrak{S}_2$

Table 2.34 $E''_C \neq 0$ en type E_8

Type de W_s	E_C	E'_C	E''_C	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
D_8	$[112, 112]$	4480_y	$4536_y + 5670_y$	1	$\mathfrak{S}_5$
	$[12, 1112]$	7168_w	5600_w	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[2, 1122]$	4480_y	5670_y	1	$\mathfrak{S}_5$
	$[11, 1113]$	4480_y	$1400_y + 4536_y$ $+5671_y$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_5$
	$[13, 13]$	1400_x	1575_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[11, 24]$	1400_x	1575_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[12, 14]$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[2, 114]$	1400_x	1575_x	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$
	$[1, 115]$	1400_z	1008_z	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$
A_8	111123	4480_y	$4536_y + 5670_y$	1	$\mathfrak{S}_5$
	11133	4200_x	3360_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	11124	4096_z	4096_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	1134	1400_x	1575_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	11115	2268_x	1296_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	1125	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	225	700_x	300_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	126	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	117	112_z	28_x	1	$\mathfrak{S}_2$
$A_7 \times A_1$	$111113 \boxtimes 11$	4480_y	$4536_y + 5670_y$	1	$\mathfrak{S}_5$
	$11123 \boxtimes 11$	4200_x	3360_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$11123 \boxtimes 2$	4096_z	4096_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$1133 \boxtimes 11$	3240_z	1050_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$11114 \boxtimes 11$	4096_z	4096_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$11114 \boxtimes 2$	2268_x	1296_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$1124 \boxtimes 11$	1400_x	1575_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	$1124 \boxtimes 2$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$224 \boxtimes 2$	700_x	300_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$44 \boxtimes 11$	560_z	50_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$1115 \boxtimes 11$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$125 \boxtimes 2$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$116 \boxtimes 11$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$116 \boxtimes 2$	112_z	28_x	1	$\mathfrak{S}_2$

à suivre

Suite de G de type E_8

Type de W_s	E_C	E'_C	E''_C	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
$A_5 \times A_2 \times A_1$	$111111 \boxtimes 12 \boxtimes 2$	4480_y	$4536_y + 5670_y$	1	$\mathfrak{S}_5$
	$11112 \boxtimes 12 \boxtimes 11$	4200_x	3360_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$11112 \boxtimes 12 \boxtimes 2$	4096_z	4096_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$11112 \boxtimes 3 \boxtimes 11$	4096_z	4096_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$11112 \boxtimes 3 \boxtimes 2$	2268_x	1296_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$1122 \boxtimes 12 \boxtimes 11$	3240_z	1050_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$1122 \boxtimes 12 \boxtimes 2$	1400_x	1575_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	$1122 \boxtimes 3 \boxtimes 2$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$222 \boxtimes 111 \boxtimes 11$	2240_x	175_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	$222 \boxtimes 3 \boxtimes 2$	700_x	300_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$1113 \boxtimes 12 \boxtimes 11$	1400_x	1575_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	$1113 \boxtimes 12 \boxtimes 2$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$1113 \boxtimes 3 \boxtimes 11$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$123 \boxtimes 3 \boxtimes 2$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$33 \boxtimes 12 \boxtimes 11$	560_z	50_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$114 \boxtimes 111 \boxtimes 2$	700_x	300_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$114 \boxtimes 12 \boxtimes 2$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$114 \boxtimes 3 \boxtimes 11$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$114 \boxtimes 3 \boxtimes 2$	112_z	28_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$15 \boxtimes 111 \boxtimes 2$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$6 \boxtimes 111 \boxtimes 11$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$6 \boxtimes 111 \boxtimes 2$	112_z	28_x	1	$\mathfrak{S}_2$

à suivre

Suite de G de type E_8

Type de W_s	E_C	E'_C	E''_C	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
$A_4 \times A_4$	$11111 \boxtimes 23$	4200_x	3360_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$11111 \boxtimes 14$	4096_z	4096_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$11111 \boxtimes 5$	2268_x	1296_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$1112 \boxtimes 23$	1400_x	1575_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	$1112 \boxtimes 14$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$122 \boxtimes 5$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$113 \boxtimes 113$	700_x	300_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$113 \boxtimes 14$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$113 \boxtimes 5$	112_z	28_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$23 \boxtimes 11111$	4200_x	3360_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$23 \boxtimes 1112$	1400_x	1575_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	$14 \boxtimes 11111$	4096_z	4096_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$14 \boxtimes 1112$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$14 \boxtimes 113$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$5 \boxtimes 11111$	2268_x	1296_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$5 \boxtimes 122$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$5 \boxtimes 113$	112_z	28_x	1	$\mathfrak{S}_2$
$D_5 \times A_3$	$[11, 111] \boxtimes 22$	4200_x	3360_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$[11, 111] \boxtimes 13$	4096_z	4096_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$[11, 111] \boxtimes 4$	2268_x	1296_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$[1, 1111] \boxtimes 112$	4480_y	5670_y	1	$\mathfrak{S}_5$
	$[1, 1111] \boxtimes 4$	2800_z	2100_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$[11, 12] \boxtimes 22$	1400_x	1575_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[11, 12] \boxtimes 13$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[1, 112] \boxtimes 13$	1400_x	1575_x	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$
	$[1, 112] \boxtimes 4$	1400_z	1008_z	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$
	$[\varnothing, 1112] \boxtimes 22$	6075_x	700_{xx}	1	$\mathfrak{S}_2$
	$[2, 12] \boxtimes 4$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$[\varnothing, 113] \boxtimes 13$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[2, 3] \boxtimes 1111$	1400_x	1575_x	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[1, 4] \boxtimes 1111$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$[1, 4] \boxtimes 112$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$[\varnothing, 5] \boxtimes 112$	112_z	28_x	1	$\mathfrak{S}_2$

à suivre

Suite de G de type E_8

Type de W_s	E_C	E'_C	E''_C	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
$E_6 \times A_2$	$1_p \boxtimes 111$	112_z	28_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$6_p \boxtimes 111$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$6'_p \boxtimes 111$	$2240'_x$	$840'_z$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$6'_p \boxtimes 12$	$4096'_x$	$4096'_z$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$6'_p \boxtimes 3$	$2800'_z$	$2100'_x$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$24_p \boxtimes 3$	700_x	300_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$30'_p \boxtimes 12$	4480_y	$4536_y + 5670_y$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_5$
	$60'_p \boxtimes 12$	4200_x	3360_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$60'_p \boxtimes 3$	4096_z	4096_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$64_p \boxtimes 3$	210_x	160_z	1	$\mathfrak{S}_2$
	$64'_p \boxtimes 111$	4480_y	5670_y	1	$\mathfrak{S}_5$
	$64'_p \boxtimes 3$	2800_z	2100_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$81_p \boxtimes 12$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$81'_p \boxtimes 12$	4096_z	4096_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$81'_p \boxtimes 3$	2268_x	1296_z	1	$\mathfrak{S}_2$
$E_7 \times A_1$	$27'_a \boxtimes 2$	$1400'_z$	$1008'_z$	1	$\mathfrak{S}_3$
	$168_a \boxtimes 2$	700_x	300_x	1	$\mathfrak{S}_2$
	$189'_c \boxtimes 2$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$210_a \boxtimes 11$	1400_z	1008_z	1	$\mathfrak{S}_3$
	$210'_a \boxtimes 2$	$5600'_z$	$2400'_z$	1	$\mathfrak{S}_2$
	$315_a \boxtimes 2$	4480_y	$4536_y + 5670_y$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_5$
	$405_a \boxtimes 2$	1400_x	1575_x	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$
	$405'_a \boxtimes 11$	4480_y	$4536_y + 5670_y$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_5$

Chapitre 3

Démonstration du théorème A

Sommaire

Le but de ce chapitre est de compléter la démonstration du théorème A. Dans un premier paragraphe, on va rappeler les notations et l'énoncé du théorème. D'après M. Geck [9], on va ensuite expliquer la réduction du problème à un problème sur la correspondance de Springer et les d-invariants des caractères des groupes de Weyl. En utilisant les résultats des chapitres 1 et 2, on va ensuite pouvoir résoudre ce dernier point.

3.1 Notations et réduction du problème

Rappelons le cadre dans lequel on se place. Soit G un groupe connexe réductif tel que son centre $Z(G)$ est connexe et $G/Z(G)$ est simple. Fixons une classe spéciale et isolée C dans G^*, elle correspond, comme nous l'avons vu au chapitre précédent à une paire $(s, \mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$. Comme dans [20, chapitre 4] et le chapitre 1, on peut associer à $\mathcal{F}$ un groupe fini $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ que l'on notera aussi $\mathcal{G}_C$. Soit $O = \Phi_G(C)$ la classe unipotente de G correspondant à C, où Φ_G est l'application définie dans le chapitre 2.

Théorème A *Soit C une classe isolée et spéciale de G^* et $O = \Phi_G(C)$ le support unipotent des faisceaux-caractères dans $\hat{G}_C$ (théorème 2.2). On suppose que*

$$\mathcal{G}_C \simeq C_G(u)/C_G(u)^\circ \qquad \text{où } u \in O. \tag{$*$}$$

Soit $X_C = \{A \in \hat{G}_C,\ A|_O \neq 0\}$. Alors l'application $A \longmapsto A|_O$ définit une bijection entre X_C et l'ensemble des systèmes locaux irréductibles et G-équivariants sur O.

Citons un théorème de M. Geck [9, théorème 4.5] qui nous permet de réduire la démonstration du théorème A à certaines propriétés de la correspondance de Springer.

Théorème 3.1 *Avec les hypothèses précédentes, supposons que l'hypothèse $(*)$ soit satisfaite et que $E''_C = 0$ (voir définition 2.3). Alors l'énoncé du théorème A est vrai.*

Remarque 3.2 Dans son article [9], M. Geck définit la notion de paire "good" [9, paragraphe 4.4] comme une paire $(s, \mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$ vérifiant l'hypothèse $(*)$ et $E''_C = 0$.

Ainsi, on voit qu'il suffit de montrer le résultat suivant :

Proposition 3.3 *Avec les hypothèses précédentes, soit C une classe spéciale et isolée dans G^* telle que l'hypothèse $(*)$ soit satisfaite. Alors on a automatiquement $E''_C = 0$.*

On va démontrer cette proposition, cas par cas selon les types de groupes de Weyl fini. Nous souhaitons également donner une traduction combinatoire de l'hypothèse $(*)$.

3.2 Type A_{n-1}

Le résultat est, dans ce cas, trivial d'après la proposition 2.5. On rappelle que, dans le type A_{n-1}, $d(E) = b(E)$ et $E''_C = 0$ pour toute classe spéciale C de G^*. En particulier, la proposition 3.3 est vraie.

3.3 Type B_n

On se place dans le cadre explicite du paragraphe 2.3.

Soient W_a et W_b deux sous groupes de Weyl de W_n, chacun étant respectivement de type B_a, B_b et B_n avec $a + b = n$.

Soient $A = [\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W_a)$, $B = [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W_b)$, tous deux spéciaux tels que $E_C = [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W_a \times W_b)$.

Soit $E'_C = [\alpha + \lambda, \beta + \mu]$ la représentation irréductible de W_n introduite au paragraphe 2.3.

La proposition 2.7 montre que l'on a toujours $E''_C = 0$ donc la proposition 3.3 est vraie dans ce cas.

Remarque 3.4 On rappelle qu'il est donné, dans [23, paragraphe 4.10], un résultat plus général que ce corollaire.

Nous allons maintenant donner une interprétation combinatoire de l'hypothèse $(*)$.

Soient $A = [\alpha, \beta]$, $B = [\lambda, \mu]$ et $C = [\alpha + \lambda, \beta + \mu]$. On suppose A et B spéciaux.

Notons Z_A l'ensemble des entrées n'apparaissant qu'une seule fois dans $\phi_1(A)$, Z_B l'ensemble des entrées n'apparaissant qu'une seule fois dans $\phi_1(B)$ et Z l'ensemble des entrées n'apparaissant qu'une seule fois dans $\psi_B(C)$. On a $\psi_B(C) = \phi_1(A) + \phi_1(B)$.

$$\phi_1(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \alpha_2 + 1 & & \alpha_3 + 2 & & \dots & & \alpha_{m+1} + m \\ & \beta_1 & & \beta_2 + 1 & & \dots & & \beta_m + (m-1) & \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \lambda_2 + 1 & & \lambda_3 + 2 & & \dots & & \lambda_{m+1} + m \\ & \mu_1 & & \mu_2 + 1 & & \dots & & \mu_m + (m-1) & \end{pmatrix}$$

$$\psi_B(C) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \lambda_1 & & \alpha_2 + \lambda_2 + 2 & & \alpha_3 + \lambda_3 + 4 & & \dots & & \alpha_{m+1} + \lambda_{m+1} + 2m \\ & \beta_1 + \mu_1 & & \beta_2 + \mu_2 + 2 & & \dots & & \beta_m + \mu_m + 2(m-1) & \end{pmatrix}$$

Avec le paragraphe 1.5.1 et le corollaire 1.14, l'hypothèse $(*)$ s'écrit alors :

$$|Z/\sim| - 1 = \frac{|Z_A| - 1}{2} + \frac{|Z_B| - 1}{2} \Longleftrightarrow 2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B|$$

Si, dans $\phi_1(A)$ et dans $\phi_1(B)$ toutes les entrées sont distinctes alors, dans $\psi_B(C)$, toutes les entrées sont distinctes et la différence entre deux entrées différentes de $\psi_B(C)$ est supérieure à 2. Donc $2|Z/\sim| = 2(2m+1)$ et $|Z_A| + |Z_B| = 2(2m+1)$. Donc, dans ce cas, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_B(C)$, on crée une égalité ($|Z/\sim|$ diminue de 2) alors, au même emplacement dans $\phi_1(A)$ et dans $\phi_1(B)$, on crée une égalité ($|Z_A|+|Z_B|$ diminue de 4), donc la relation $2|Z/\sim| = |Z_A|+|Z_B|$ est préservée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_B(C)$, on crée une différence de 1 ($|Z/\sim|$ diminue de 1) alors, au même emplacement dans $\phi_1(A)$ ou dans $\phi_1(B)$, on crée une égalité et au même emplacement, dans l'autre symbole, on crée une différence de 1 ($|Z_A| + |Z_B|$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B|$ est préservée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_B(C)$, on préserve une différence supérieure à 2 ($|Z/\sim|$ inchangé), mais qu'on crée, au même emplacement dans $\phi_1(A)$ ou dans $\phi_1(B)$, une égalité ($|Z_A| + |Z_B|$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B|$ n'est pas préservée et devient $2|Z/\sim| > |Z_A| + |Z_B|$.

Ainsi, avec le paragraphe A.2, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée pour $A \boxtimes B$ si et seulement si, dans $\phi_1(A)$ et dans $\phi_1(B)$, s'il y a une égalité à un emplacement dans un des deux symboles alors, dans l'autre, il y a une égalité ou une différence de 1.

3.4 Type C_n

On se place dans le cadre explicite du paragraphe 2.4.

Soient W'_a et W_b deux sous groupes de Weyl de W_n, avec W'_a de type D_a, W_b de type C_b, W_n de type C_n et $a + b = n$.

Soient $A = [\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W'_a)$, $B = [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W_b)$. On suppose A et B spéciaux. Quitte à échanger α et β, on peut supposer que, si $(I, J) = \phi_0[\alpha, \beta]$ et m est la longueur de I (et donc de J également) alors $J_1 \leq I_1 \leq J_2 \leq \cdots \leq J_m \leq I_m$.

Soit $E_C = [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W'_a \times W_b)$.

Soient $E'_C = [\alpha + \lambda, \beta + \mu]$ et $E''_0 = [\beta + \lambda, \alpha + \mu]$, les représentations irréductibles de W_n introduites au paragraphe 2.4.

3.4.1 Traduction combinatoire

D'après la proposition 2.14, l'égalité $E''_C = 0$ est automatiquement vérifiée si A est dégénéré. Si A ne l'est pas alors il suffit de voir que l'hypothèse $(*)$ entraîne $d_C(E''_0) > d_C(E'_C)$, c'est-à-dire que l'hypothèse $(*)$ implique qu'il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\beta_i \neq \alpha_i$ et $\mu_i \neq \lambda_{i+1} + 1$.

3.4.2 Signification de l'hypothèse $(*)$

Soient $A = [\alpha, \beta]$, $B = [\lambda, \mu]$ et $C = [\alpha + \lambda, \beta + \mu]$. On suppose A et B spéciaux. Soit D le symbole obtenu en ajoutant 1 à toutes les entrées de $\phi_0(A)$ et en rajoutant un zéro au début de la première ligne du résultat. Quitte à augmenter m, on peut supposer que le premier terme de la première ligne de $\phi_1(B)$ est 0. On a $\psi_C(C) = D + \phi_1(B)$.

$$\phi_0(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 + 1 & \alpha_3 + 2 & \ldots & \alpha_m + (m-1) \\ \beta_1 & \beta_2 + 1 & \beta_3 + 2 & \ldots & \beta_m + (m-1) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & \alpha_1 + 1 & & \alpha_2 + 2 & & \alpha_3 + 3 & & \ldots & & \alpha_m + m \\ & \beta_1 + 1 & & \beta_2 + 2 & & \beta_3 + 3 & & \ldots & & \beta_m + m & \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \lambda_2 + 1 & & \lambda_3 + 2 & & \ldots & & \lambda_{m+1} + m \\ & \mu_1 & & \mu_2 + 1 & & \ldots & & \mu_m + (m-1) & \end{pmatrix}$$

$$\psi_C(C) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \alpha_1 + \lambda_2 + 2 & & \alpha_2 + \lambda_3 + 4 & & \ldots & & \alpha_m + \lambda_{m+1} + 2m \\ & \beta_1 + \mu_1 + 1 & & \beta_2 + \mu_2 + 3 & & \ldots & & \beta_m + \mu_m + 2m - 1 & \end{pmatrix}$$

Notons Z_A l'ensemble des entrées n'apparaissant qu'une seule fois dans $\phi_0(A)$, Z_B l'ensemble des entrées n'apparaissant qu'une seule fois dans $\phi_1(B)$ et Z l'ensemble des entrées n'apparaissant qu'une seule fois dans $\psi_C(C)$. Avec les paragraphes 1.6.1, 1.7.1 et le corollaire 1.21, on a les résultats suivants.

★ **Cas** $\delta_C = 0$

On suppose que $\delta_C(Spr_C^{-1}\psi_C(C)) = 0$.
Si A est dégénéré, alors l'hypothèse $(*)$ s'écrit :

$$|Z/\sim| - 1 = \frac{|Z_B| - 1}{2} \Longleftrightarrow 2|Z/\sim| = |Z_B| + 1$$

Sinon, l'hypothèse $(*)$ s'écrit alors :

$$|Z/\sim| - 1 = \frac{|Z_A|}{2} - 1 + \frac{|Z_B| - 1}{2} \Longleftrightarrow 2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B| - 1$$

Si, dans $\phi_0(A)$ et dans $\phi_1(B)$ toutes les entrées sont distinctes alors, dans $\psi_C(C)$, toutes les entrées sont distinctes et la différence entre deux entrées différentes de $\psi_C(C)$ est supérieure à 2. Donc $2|Z/\sim| = 2(2m+1) = 4m+2$ et $|Z_A|+|Z_B|-1 = 2m+2(m+1)-1 = 4m+1$. Donc, dans ce cas, l'hypothèse $(*)$ n'est pas vérifiée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_C(C)$, on crée une égalité ($|Z/\sim|$ diminue de 2) alors, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ et dans $\phi_1(B)$, on crée une égalité ($|Z_A| + |Z_B| - 1$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| > |Z_A| + |Z_B| - 1$ est préservée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_C(C)$, on crée une différence de 1 ($|Z/\sim|$ diminue de 1) alors, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ ou dans $\phi_1(B)$, on crée une égalité et au même emplacement, dans l'autre symbole, on crée une différence de 1 ($|Z_A| + |Z_B| - 1$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| > |Z_A| + |Z_B| - 1$ est préservée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_C(C)$, on préserve une différence supérieure à 2 ($|Z/\sim|$ inchangé), mais qu'on crée, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ ou dans $\phi_1(B)$, une égalité ($|Z_A| + |Z_B| - 1$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| > |Z_A| + |Z_B| - 1$ est préservée.

Ainsi, avec le paragraphe A.2, dans le cas $\delta_C = 0$, si l'hypothèse $(*)$ est vérifiée pour $A \boxtimes B$ alors A est dégénéré.

★ **Cas** $\delta_C = 1$

On suppose que $\delta_C(Spr_C^{-1}\psi_C(C)) = 1$.
Si A est dégénéré, alors l'hypothèse $(*)$ s'écrit :

$$|Z/\sim| - 2 = \frac{|Z_B| - 1}{2} \Longleftrightarrow 2|Z/\sim| = |Z_B| + 3$$

Sinon, l'hypothèse $(*)$ s'écrit alors :

$$|Z/\sim| - 2 = \frac{|Z_A|}{2} - 1 + \frac{|Z_B| - 1}{2} \Longleftrightarrow 2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B| + 1$$

Si, dans $\phi_0(A)$ et dans $\phi_1(B)$ toutes les entrées sont distinctes alors, dans $\psi_C(C)$, toutes les entrées sont distinctes et la différence entre deux entrées différentes de $\psi_C(C)$ est supérieure à 2. Donc $2|Z/\sim| = 2(2m+1) = 4m+2$ et $|Z_A|+|Z_B|+1 = 2m+(2m+1)+1 = 4m+2$. Donc, dans ce cas, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_C(C)$, on crée une égalité ($|Z/\sim|$ diminue de 2) alors, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ et dans $\phi_1(B)$, on crée une égalité ($|Z_A| + |Z_B| + 1$ diminue de 4), donc la relation $2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B| + 1$ est préservée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_C(C)$, on crée une différence de 1 ($|Z/\sim|$ diminue de 1) alors, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ ou dans $\phi_1(B)$, on crée une égalité et au même emplacement, dans l'autre symbole, on crée une différence de 1 ($|Z_A| + |Z_B| + 1$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B| + 1$ est préservée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_C(C)$, on préserve une différence supérieure à 2 ($|Z/\sim|$ inchangé), mais qu'on crée, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ ou dans $\phi_1(B)$, une égalité ($|Z_A| + |Z_B| + 1$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B| + 1$ n'est pas préservée.

Ainsi, avec le paragraphe A.2, dans le cas $\delta_C = 1$ et A non dégénéré, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée, si et seulement si, dans D (ou de façon équivalente dans $\phi_0(A)$) et dans $\phi_1(B)$, s'il y a une égalité à un emplacement dans un des deux symboles alors, dans l'autre, il y a une égalité ou une différence de 1, c'est-à-dire :

- $\alpha_i + i - 1 - (\beta_i + i - 1) = 0$ implique $\lambda_{i+1} + i - (\mu_i + i - 1) = 0$ ou 1.
- $\lambda_{i+1} + i - (\mu_i + i - 1) = 0$ implique $\alpha_i + i - 1 - (\beta_i + i - 1) = 0$ ou 1.
- $\beta_{i+1} + i - (\alpha_i + i - 1) = 0$ implique $\mu_{i+1} + i - (\lambda_{i+1} + i) = 0$ ou 1.
- $\mu_{i+1} + i - (\lambda_{i+1} + i) = 0$ implique $\beta_{i+1} + i - (\alpha_i + i - 1) = 0$ ou 1.

3.4.3 Démonstration de $(*)$ implique $E''_C = 0$

Soient $A = [\alpha, \beta]$, $B = [\lambda, \mu]$ et $C = [\alpha + \lambda, \beta + \mu]$. On suppose A et B spéciaux.

Si A est dégénéré alors, par le paragraphe 3.4.1, l'égalité $E''_C = 0$ est automatiquement vérifiée.

Supposons donc A non dégénéré et que $A \boxtimes B$ vérifie la condition $(*)$. Nécessairement, par le paragraphe 3.4.2, $\delta_C(Spr_C^{-1}\psi_C(C)) = 1$.

Alors, par le corollaire 1.21, il existe, dans Z, une classe (autre que la classe de 0) de cardinal impair, en particulier, il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\beta_i + \mu_i + 2i - 1 < \alpha_i + \lambda_{i+1} + 2i$ et la différence est supérieure ou égale à 2. Alors, d'après le paragraphe 3.4.2, on a nécessairement $\beta_i + i - 1 < \alpha_i + i - 1$ et $\mu_i + i - 1 < \lambda_{i+1} + i$ donc $\beta_i < \alpha_i$ et $\mu_i < \lambda_{i+1} + 1$, et on conclut par le paragraphe 3.4.1.

Ainsi, l'hypothèse $(*)$ implique $E''_C = 0$, c'est-à-dire la proposition 3.3 est vraie dans le cas C_n.

3.5 Type D_n

On se place dans le cadre explicite du paragraphe 2.5.

Soient W'_a et W'_b deux sous groupes de Weyl de W'_n, avec W'_i de type D_i avec $i = a$, b ou n et $a + b = n$.

Soient $A = [\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W'_a)$, $B = [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W'_b)$. On suppose A et B spéciaux. Quitte à échanger α et β (respectivement λ et μ), on peut supposer que, si $(I, J) = \phi_0[\alpha, \beta]$ (respectivement $(I, J) = \phi_0[\lambda, \mu]$) et m est la longueur de I (et donc de J également) alors $J_1 \leq I_1 \leq J_2 \leq \cdots \leq J_m \leq I_m$.

Soit $E_C = [\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu] \in \mathrm{Irr}(W'_a \times W'_b)$.

Soient $E'_C = [\alpha + \lambda, \beta + \mu]$ et $E''_0 = [\beta + \lambda, \alpha + \mu]$ les représentations irréductibles de W'_n introduites au paragraphe 2.5.

3.5.1 Traduction combinatoire

D'après la proposition 2.23, l'égalité $E''_C = 0$ est automatiquement vérifiée si A ou B est dégénéré et sinon il suffit de voir que l'hypothèse $(*)$ entraîne $d_D(E''_0) > d_D(E'_C)$, c'est-à-dire que l'hypothèse $(*)$ implique qu'il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\beta_i \neq \alpha_i$ et $\mu_i \neq \lambda_i$.

3.5.2 Signification de l'hypothèse $(*)$

Soient $A = [\alpha, \beta]$, $B = [\lambda, \mu]$ et $C = [\alpha + \lambda, \beta + \mu]$. On suppose A et B spéciaux. On a $\psi_D(C) = \phi_0(A) + \phi_0(B)$.

$$\phi_0(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2+1 & \alpha_3+2 & \dots & \alpha_m+(m-1) \\ \beta_1 & \beta_2+1 & \beta_3+2 & \dots & \beta_m+(m-1) \end{pmatrix}$$

$$\phi_0(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2+1 & \lambda_3+2 & \dots & \lambda_m+(m-1) \\ \mu_1 & \mu_2+1 & \mu_3+2 & \dots & \mu_m+(m-1) \end{pmatrix}$$

$$\psi_D(C) = \begin{pmatrix} \alpha_1+\lambda_1 & \alpha_2+\lambda_2+2 & \alpha_3+\lambda_3+4 & \dots & \alpha_m+\lambda_m+2(m-1) \\ \beta_1+\mu_1 & \beta_2+\mu_2+2 & \beta_3+\mu_3+4 & \dots & \beta_m+\mu_m+2(m-1) \end{pmatrix}$$

Notons Z_A l'ensemble des entrées n'apparaissant qu'une seule fois dans $\phi_0(A)$, Z_B l'ensemble des entrées n'apparaissant qu'une seule fois dans $\phi_0(B)$ et Z l'ensemble des entrées n'apparaissant qu'une seule fois dans $\psi_D(C)$. Avec le paragraphe 1.7.1 et le corollaire 1.28, on a les résultats suivants.

★ **Cas** $\delta_D = 0$

On suppose que $\delta_D(Spr_D^{-1}\psi_D(C)) = 0$.

Si A et B sont dégénérés, $\psi_D(C)$ est dégénéré et alors l'hypothèse $(*)$ est vérifiée.

Si une seule des deux représentations A ou B est dégénérée (A par exemple), alors l'hypothèse $(*)$ s'écrit :

$$|Z/\sim| - 1 = \frac{|Z_B|}{2} - 1 \Longleftrightarrow 2|Z/\sim| = |Z_B|$$

Sinon, l'hypothèse $(*)$ s'écrit alors :

$$|Z/\sim| - 1 = \frac{|Z_A|}{2} - 1 + \frac{|Z_B|}{2} - 1 \Longleftrightarrow 2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B| - 2$$

Si, dans $\phi_0(A)$ et dans $\phi_0(B)$ toutes les entrées sont distinctes alors, dans $\psi_D(C)$, toutes les entrées sont distinctes et la différence entre deux entrées différentes de $\psi_D(C)$ est supérieure à 2. Donc $2|Z/\sim| = 4m$ et $|Z_A|+|Z_B|-2 = 2m+2m-2 = 4m-2$. Donc, dans ce cas, l'hypothèse $(*)$ n'est pas vérifiée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_D(C)$, on crée une égalité ($|Z/\sim|$ diminue de 2) alors, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ et dans $\phi_0(B)$, on crée une égalité ($|Z_A|+|Z_B|-2$ diminue de 4), donc la relation $2|Z/\sim| > |Z_A|+|Z_B|-2$ est préservée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_D(C)$, on crée une différence de 1 ($|Z/\sim|$ diminue de 1) alors, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ ou dans $\phi_0(B)$, on crée une égalité et au même emplacement, dans l'autre symbole, on crée une différence de 1 ($|Z_A|+|Z_B|-2$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| > |Z_A|+|Z_B|-2$ est préservée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_D(C)$, on préserve une différence supérieure à 2 ($|Z/\sim|$ inchangé), mais qu'on crée, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ ou dans $\phi_0(B)$, une égalité ($|Z_A|+|Z_B|-2$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| > |Z_A|+|Z_B|-2$ est préservée.

Ainsi, avec le paragraphe A.2, dans le cas $\delta_D = 0$, si l'hypothèse $(*)$ est vérifiée pour $A \boxtimes B$ alors A ou B est dégénéré.

★ **Cas** $\delta_D = 1$

On suppose que $\delta_D(Spr_D^{-1}\psi_D(C)) = 1$.

Si A et B sont dégénérés, $\psi_D(C)$ est dégénéré et alors, par le corollaire 1.28, $\delta_D(Spr_D^{-1}\psi_D(C)) = 0$, ce qui est absurde.

Si une seule des deux représentations A ou B est dégénérée (A par exemple), alors l'hypothèse $(*)$ s'écrit :

$$|Z/\sim|-2 = \frac{|Z_B|}{2} - 1 \Longleftrightarrow 2|Z/\sim| = |Z_B|+2$$

Sinon, l'hypothèse $(*)$ s'écrit alors :

$$|Z/\sim|-2 = \frac{|Z_A|}{2} - 1 + \frac{|Z_B|}{2} - 1 \Longleftrightarrow 2|Z/\sim| = |Z_A|+|Z_B|$$

Si, dans $\phi_0(A)$ et dans $\phi_0(B)$ toutes les entrées sont distinctes alors, dans $\psi_D(C)$, toutes les entrées sont distinctes et la différence entre deux entrées différentes de $\psi_D(C)$ est supérieure à 2. Donc $2|Z/\sim| = 4m$ et $|Z_A|+|Z_B|+1 = 2m+2m = 4m$. Donc, dans ce cas, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_D(C)$, on crée une égalité ($|Z/\sim|$ diminue de 2) alors, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ et dans $\phi_0(B)$, on crée une égalité ($|Z_A|+|Z_B|$ diminue de 4), donc la relation $2|Z/\sim| = |Z_A|+|Z_B|$ est préservée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_D(C)$, on crée une différence de 1 ($|Z/\sim|$ diminue de 1) alors, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ ou dans $\phi_0(B)$, on crée une égalité et au même emplacement, dans l'autre symbole, on crée une différence de 1 ($|Z_A| + |Z_B|$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B|$ est préservée.

• Si, à un emplacement du symbole $\psi_D(C)$, on préserve une différence supérieure à 2 ($|Z/\sim|$ inchangé), mais qu'on crée, au même emplacement dans $\phi_0(A)$ ou dans $\phi_0(B)$, une égalité ($|Z_A| + |Z_B|$ diminue de 2), donc la relation $2|Z/\sim| = |Z_A| + |Z_B|$ n'est pas préservée.

Ainsi, avec le paragraphe A.2, dans le cas $\delta_D = 1$ et A et B non dégénérés, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée, si et seulement si, dans $\phi_0(A)$ et dans $\phi_0(B)$, s'il y a une égalité à un emplacement dans un des deux symboles alors, dans l'autre, au même emplacement, il y a une égalité ou une différence de 1, c'est-à-dire :

- $\alpha_i + i - 1 - (\beta_i + i - 1) = 0$ implique $\lambda_i + i - 1 - (\mu_i + i - 1) = 0$ ou 1.
- $\lambda_i + i - 1 - (\mu_i + i - 1) = 0$ implique $\alpha_i + i - 1 - (\beta_i + i - 1) = 0$ ou 1.
- $\beta_{i+1} + i - (\alpha_i + i - 1) = 0$ implique $\mu_{i+1} + i - (\lambda_i + i - 1) = 0$ ou 1.
- $\mu_{i+1} + i - (\lambda_i + i - 1) = 0$ implique $\beta_{i+1} + i - (\alpha_i + i - 1) = 0$ ou 1.

3.5.3 Démonstration de $(*)$ implique $E''_C = 0$

Soient $A = [\alpha, \beta]$, $B = [\lambda, \mu]$ et $C = [\alpha + \lambda, \beta + \mu]$. On suppose A et B spéciaux.

Si A ou B est dégénéré alors, par le paragraphe 3.5.1, l'égalité $E''_C = 0$ est automatiquement vérifiée.

Supposons donc A et B non dégénérés et que $A \boxtimes B$ vérifie la condition $(*)$. Nécessairement, par le paragraphe 3.5.2, $\delta_D(Spr_D^{-1}\psi_D(C)) = 1$.

Alors, par le corollaire 1.28, il existe, dans Z, une classe de cardinal impair, en particulier, il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\beta_i + \mu_i + 2(i-1) < \alpha_i + \lambda_i + 2(i-1)$ et la différence est supérieure ou égale à 2. Alors, d'après le paragraphe 3.5.2, on a nécessairement $\beta_i + i - 1 < \alpha_i + i - 1$ et $\mu_i + i - 1 < \lambda_i + i - 1$ donc $\beta_i < \alpha_i$ et $\mu_i < \lambda_i$, et on conclut par le paragraphe 3.5.1.

Ainsi, l'hypothèse $(*)$ implique $E''_C = 0$, c'est-à-dire la proposition 3.3 est vraie dans le cas D_n.

3.6 Types exceptionnels

Le résultat est clair dans le cas des groupes exceptionnels. En effet, il suffit d'examiner les tables du paragraphe 2.6 : les classes spéciales isolées C de G^* ne vérifiant pas $E''_C = 0$ ne vérifient pas l'hypothèse $(*)$ non plus.

Chapitre 4

Théorème B pour les groupes classiques et Frobenius

Sommaire

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème B. A l'aide des chapitres précédents, la démonstration est purement combinatoire pour la première partie du théorème. Pour ce qui est de la seconde, elle met en jeu la F-stabilité. Il s'agit donc d'introduire la notion de Frobenius, ce qui nous amène à travailler sur des groupes finis. Dans ce chapitre, on s'intéressera à la démonstration du théorème B pour les groupes classiques. Le cas des groupes exceptionnels sera étudié au chapitre 5. Notons que le type ${}^3D_4$ sera considéré comme exceptionnel et qu'il n'interviendra pas dans les cas classiques, on ne parlera donc pas de ce type dans ce chapitre.

4.1 Théorème B et F-stabilité

Soit G un groupe réductif connexe de centre $Z(G)$ connexe en bonne caractéristique muni d'un endomorphisme de Frobenius F. On impose que tous nos choix soient F-stables : T, T^*, ainsi que les sous groupes de Borel définissant les racines positives et donc les racines simples.

Théorème B *Supposons que $G/Z(G)$ soit simple. Soit O une classe unipotente de G. Alors il existe une classe spéciale et isolée C dans G^* telle que $O = \Phi_G(C)$ et telle que l'hypothèse $(*)$ soit satisfaite. En d'autres termes, $\Phi_G : \mathcal{P}(G) \longrightarrow X_G$, restreinte aux classes isolées et vérifiant l'hypothèse $(*)$ est surjective.*

En plus, si O est F-stable, alors C peut être choisie F-stable également.

Un résultat de ce type a été énoncé par G. Lusztig, dans son livre [20, paragraphe 13.3]. Nous fournissons ici une preuve, en précisant, pour toute classe unipotente O de G, une classe spéciale isolée C dans G^* avec $O = \Phi_G(C)$.

On sait que, si C est F-stable , alors $O = \Phi_G(C) \in X_G$ est F-stable [20, paragraphe 13.4].

Le sens de "C est F-stable" est clair, en revanche, il nous faut exprimer le sens de la F-stabilité d'une paire $(s, \mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$ de façon à ce que les deux définitions soient compatibles avec la correspondance entre les paires et les classes spéciales de G^*.

On rappelle que l'on identifie W^* et W.

Définition 4.1 On dit qu'une paire $(s, \mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$ est F-stable si on a les conditions suivantes. On rappelle que $s \in T^*$ et que T^* est F-stable. On suppose que la W-orbite de s est F-stable. Donc il existe $w_1 \in W$ tel que $w_1 s w_1^{-1} = F(s)$. Soit w_1 l'unique élément de longueur minimale ayant cette propriété. Alors l'application $\phi_F : W_s \longrightarrow W_s$, $w \longmapsto F(w_1 w w_1^{-1})$ est un automorphisme de W_s. On suppose aussi que $\mathcal{F}$ est invariante sous ϕ_F.

D'après [20, paragraphes 8.4 et 2.15], si la paire $(s, \mathcal{F})$ correspond à la classe spéciale C de G^* via l'explication donnée au début du chapitre 2, on a :

$$(s, \mathcal{F}) \text{ est } F\text{-stable} \Longleftrightarrow C \text{ est } F\text{-stable}.$$

Notons cette remarque importante : d'après [20, paragraphe 2.15], on sait que ϕ_F (définition 4.1) préserve globalement le système de racines simples de W_s. Le nombre de choix possibles pour ϕ_F est donc très restreint.

D'après [20, paragraphe 4.17], si $\mathcal{F}$ est invariante sous ϕ_F alors toute représentation de la famille $\mathcal{F}$ est ϕ_F-stable. En particulier, l'unique représentation spéciale E_C de $\mathcal{F}$ est ϕ_F-stable.

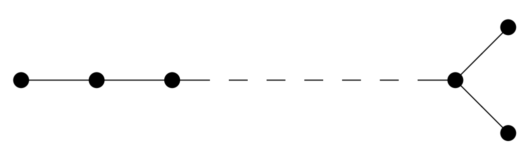
L'action de ϕ_F sur le diagramme de Dynkin peut induire une permutation de composantes connexes égales et, modulo cette permutation, les différents cas de l'action de ϕ_F sur chacune des composantes connexes sont décrits dans [3, paragraphe 1.19], il s'agit de l'action d'un Frobenius que l'on notera F'. F' correspond donc à l'action de ϕ_F sur une composante connexe de W_s stable par F. Nous allons nous intéresser tout d'abord à ce dernier point.

4.1.1 F'-stabilité des représentations

Si W est un groupe de Weyl de type A_{n-1}, B_n ou C_n, toutes les représentations de W sont F'-stables. En effet, le Frobenius est soit trivial, soit intérieur (cas ${}^2A_{n-1}$).

Si W est de type D_n et F' est trivial, alors toutes les représentations de W sont F'-stables.

Reste uniquement le cas de W de type D_n et F' agit comme suit (on rappelle que le cas ${}^3D_4$ n'intervient pas dans le traitement des cas classiques)



Ce problème est résolu dans [14, paragraphe 5.6].

Proposition 4.2 *Si* $[\alpha, \beta] \in \mathrm{Irr}(W'_n)$ *où* W'_n *est un groupe de Weyl de type* D_n *sur lequel le Frobenius* F' *échange deux racines alors* $[\alpha, \beta]$ *est* F'*-stable si et seulement si* $\alpha \neq \beta$*. En résumé, une représentation est* F'*-stable si et seulement si elle est non dégénérée.*

4.1.2 Existence de s comme dans la définition 4.1

On souhaite montrer dans ce paragraphe qu'il existe $s \in T^*$ dont la W-orbite est F-stable et dont le centralisateur est de l'un des types décrits aux chapitres précédents pour les groupes classiques de type B_n, C_n et D_n.

Les centralisateurs des éléments semisimples sont en principe connus ([5] ou [2]). Néanmoins, la détermination exacte du type du centralisateur et de l'action du Frobenius est parfois assez délicate [29, paragraphe 4]. C'est pour cela que nous proposons ici de présenter en détail les résultats sur les centralisateurs dont nous aurons besoin.

Soit k une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. On munit tous nos groupes algébriques d'un endomorphisme de Frobenius F.

On définit les groupes matriciels $Sp_{2m}(k)$, $O_{2m+1}(k)$ et $O_{2m}(k)$ comme dans [11] ; ce sont les groupes de matrices qui laissent invariante une certaine forme bilinéaire alternée ou symétrique. Un choix convenable de la matrice de cette forme bilinéaire est spécifié dans [11, paragraphe 1.3.15]. On a

$$[O_{2m+1}(k) : SO_{2m+1}(k)] = 2 \quad \text{et} \quad [O_{2m}(k) : SO_{2m}(k)] = 2,$$

où SO désigne le sous groupe des matrices de déterminant 1.

Les groupes $Sp_{2m}(k)$, $SO_{2m+1}(k)$ et $SO_{2m}(k)$ sont connexes et simples. Or, seul le groupe $Sp_{2m}(k)$ est un groupe simplement connexe. Si G est le groupe $SO_{2m+1}(k)$ ou $SO_{2m}(k)$, alors il existe un homomorphisme surjectif $G_{sc} \longrightarrow G$ avec un noyau d'ordre 2, où G_{sc} est le groupe simplement connexe du même type [3, chapitre 1].

Lemme 4.3 *On a les résultats matriciels suivants :*

(a) Soit $\tilde{s} = Diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1) \in Sp_{2n}(k)$*, composé de* a *fois* 1 *puis* $2b$ *fois* -1 *puis* a *fois* 1*.*

$\tilde{s}$ est un élément F-stable du tore maximal des matrices diagonales dont le centralisateur est $Sp_{2a}(k) \times Sp_{2b}(k)$*, de type* $C_a \times C_b$ *avec* $a + b = n$*.*

(b) *Soit* $\tilde{s} = Diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1) \in SO_{2n+1}(k)$*, composé de* a *fois* 1 *puis* $2b+1$ *fois* -1 *puis* a *fois* 1*.*

$\tilde{s}$ *est un élément* F*-stable du tore maximal des matrices diagonales dont le centralisateur est composé des couples de matrices de* $O_{2a}(k) \times O_{2b+1}(k)$ *dont le produit des déterminants vaut* 1*, de type* $D_a \times B_b$*. Le groupe des composantes connexes du centralisateur est d'ordre* 2*.*

Notons

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{a-1} \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{-I_{2b+1}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} I_{a-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Alors $\tilde{h}$ *est un élément de la composante connexe du centralisateur de* $\tilde{s}$ *ne contenant pas l'élément neutre et* $\tilde{h}$ *est dans le normalisateur du tore maximal des matrices diagonales.*

(c) *Soit* $\tilde{s} = Diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1) \in SO_{2n}(k)$*, composé de* a *fois* 1 *puis* $2b$ *fois* -1 *puis* a *fois* 1*.*

$\tilde{s}$ *est un élément* F*-stable du tore maximal des matrices diagonales dont le centralisateur est composé des couples de matrices de* $O_{2a}(k) \times O_{2b}(k)$ *dont le produit des déterminants vaut* 1*, de type* $D_a \times D_b$*. Le groupe des composantes connexes du centralisateur est d'ordre* 2*. Notons*

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{a-1} \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{2(b-1)} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} I_{a-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Alors $\tilde{h}$ *est un élément de la composante connexe du centralisateur de* $\tilde{s}$ *ne contenant pas l'élément neutre et* $\tilde{h}$ *est dans le normalisateur du tore maximal des matrices diagonales.*

D'après ce lemme, si G^* est un groupe simplement connexe de type C_n, alors il existe $s \in T^*$, F-stable (T^* est un tore maximal F-stable de G^*) tel que le centralisateur de s soit de type $C_a \times C_b$ avec $a + b = n$.

Soit G^* un groupe simplement connexe de type B_n (respectivement D_n). On souhaite montrer qu'il existe $s \in T^*$ dont la W-orbite est F-stable tel que le centralisateur de s, qui est un groupe algébrique connexe soit de type $D_a \times B_b$ (respectivement $D_a \times D_b$) avec $a + b = n$.

Si $a = 0$, le résultat est trivial en prenant $s = 1$. On suppose que $a \neq 0$. En particulier, les centralisateurs décrits dans le lemme ont deux composantes connexes.

Notons alors $\tilde{G}$ le groupe $SO_{2n+1}(k)$ (respectivement $SO_{2n}(k)$).

On a alors $\pi : G^* \longrightarrow \tilde{G}$ un morphisme surjectif de groupes algébriques de noyau $< z >$ avec $z \in G^*$ central, d'ordre 2. z est F-stable car le noyau de π est F-stable. On note T^* le tore maximal de G^* tel que $\pi(T^*) = \tilde{T}$, tore maximal de $\tilde{G}$ constitué des matrices diagonales contenues dans $\tilde{G}$. T^* est F-stable.

Soit $\tilde{s}$ un élément semisimple de $\tilde{T}$, F-stable dont le centralisateur $\tilde{H}$ a deux composantes connexes et est de type $D_a \times B_b$ (respectivement $D_a \times D_b$).

Soit $s \in T^*$ tel que $\pi(s) = \tilde{s}$. Alors $F(s) = s$ ou zs, qui sont tous deux des éléments de T^*. Si $F(s) = s$, on a terminé. Sinon, on veut montrer que s et zs sont conjugués dans G^*.

Notons $\tilde{C}$ la classe de conjugaison de $\tilde{s}$ dans $\tilde{G}$ et C la classe de conjugaison de s dans G^*. Notons H le centralisateur de s dans G^*, c'est un groupe connexe. $\pi(H)$ est un sous groupe de $\tilde{H}$ d'indice 2. En effet, l'indice est 1 ou 2, mais par un argument de connexité, c'est 2. En effet, comme H est connexe, le sous-groupe $\pi(H) \subset \tilde{H}$ l'est aussi. D'après la description des centralisateurs dans le lemme 4.3, on a alors $[\tilde{H} : \pi(H)] = 2$. Soit $h \in G^*$ tel que $\pi(h) = \tilde{h}$ où $\tilde{h}$ est défini dans le lemme 4.3. Alors $\tilde{H} = \pi(H) \cup \pi(h)\pi(H)$. Mais, alors $\pi(hsh^{-1}) = \tilde{s}$ donc hsh^{-1} vaut s ou zs. Mais le premier cas n'est pas possible. Ainsi s et zs sont conjugués via l'élément h.

Ainsi la W-orbite (W est identifié à W^*) de s est F-stable [5, théorème 1.5.1]. De plus, $\tilde{s}$ et s ont, dans les groupes algébriques des centralisateurs du même type.

Remarque 4.4 De plus, le w_1 de la définition 4.1 est donné par h qui est un élément du normalisateur de T^*. Il est facile de connaître l'action de $\pi(h)$ sur les deux composantes de $\tilde{H}$: elles ne sont pas échangées. Ceci nous permet de conclure que les deux composantes de H ne sont pas échangées par ϕ_F.

Lemme 4.5 *Soit G^* un groupe algébrique simplement connexe et T^* un tore maximal F-stable de G^*. Soient trois entiers a, b et n tels que $a+b=n$.*

(a) Si G^* est de type C_n, il existe $s \in T^*$ dont la W-orbite est F-stable tel que son centralisateur est de type $C_a \times C_b$. Ainsi $W_s \subset W$ est de type $B_a \times B_b$.

(b) Si G^* est de type B_n, il existe $s \in T^*$ dont la W-orbite est F-stable tel que son centralisateur est de type $D_a \times B_b$. Ainsi $W_s \subset W$ est de type $D_a \times C_b$.

(c) Si G^* est de type D_n, il existe $s \in T^*$ dont la W-orbite est F-stable tel que son centralisateur est de type $D_a \times D_b$. Ainsi $W_s \subset W$ est de type $D_a \times D_b$.

Dans tous les cas, les deux composantes de H ne sont pas échangées par ϕ_F.

Dans ce chapitre, on va démontrer le théorème B pour G groupe classique.

Pour ce faire, on étudie les différents types pour G puis pour la F-stabilité on étudie les différents cas pour G^F en utilisant la classification donnée dans [3, page 37] et tous les résultats combinatoires obtenus au chapitre précédent.

4.2 Première partie du théorème B

Dans cette section, on va montrer la première partie du théorème B pour les groupes classiques, c'est-à-dire la partie du théorème B sans la F-stabilité.

Pour cette première partie, on va décrire C via sa représentation par une paire $(s,\mathcal{F})$. $\mathcal{F}$ sera explicitement donnée par son unique caractère spécial. Quant à s, son existence sera assurée par le lemme 4.5.

4.2.1 Le type A_{n-1}

Si G est de type A_{n-1}, le résultat est évident par la correspondance de Springer.

Etant donnée une classe unipotente O de G, paramétrée par α, partition de n, on choisit la paire $(s,\mathcal{F})$ où $s=1$ (alors $W_s=W$) et $\mathcal{F}=\{\alpha\}$. Alors $(s,\mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$ correspond à une classe spéciale isolée C de G^* et, avec la proposition 1.4, $\Phi_G(C)=O$.

Remarquons, qu'en fait, C est une classe unipotente de G^*, c'est la classe unipotente de G^* paramétrée par la partition α.

4.2.2 Le type B_n

Si G est de type B_n, si O est une classe unipotente de G, posons alors $(U,V) = Spr_B(O) \in D^{2,0}_{n,1}$.

D'après la démonstration de la proposition 2.11, il s'agit de trouver $[\alpha,\beta]$ et $[\lambda,\mu]$ tels que :

(a) $\phi_1[\alpha,\beta] + \phi_1[\lambda,\mu] = Spr_B(O)$ (démonstration de la proposition 2.11).

(b) $[\alpha,\beta]$ soit une représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type B_a et $[\lambda,\mu]$ soit une représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type B_b avec $a+b=n$ (a et b seront fixés par la condition précédente, qui impose $a+b=n$).

(c) il existe $s \in T^*$ tel que $W_s \subset W$ soit de type $B_a \times B_b$.

(d) l'hypothèse $(*)$ soit vérifiée pour $[\alpha,\beta] \boxtimes [\lambda,\mu]$.

On suppose que $U = (a_1,\ldots,a_{m+1})$ et $V = (b_1,\ldots,b_m)$. On définit alors :

$$\begin{cases} \alpha'_i = \lfloor a_i/2 \rfloor & \text{pour } i \in \{1,\ldots,m+1\} \\ \lambda'_i = a_i - \lfloor a_i/2 \rfloor & \text{pour } i \in \{1,\ldots,m+1\} \\ \beta'_i = \lfloor b_i/2 \rfloor & \text{pour } i \in \{1,\ldots,m\} \\ \mu'_i = b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor & \text{pour } i \in \{1,\ldots,m\} \end{cases}$$

Posons $\alpha' = (\alpha'_1,\ldots,\alpha'_{m+1})$, $\beta' = (\beta'_1,\ldots,\beta'_m)$, $\lambda' = (\lambda'_1,\ldots,\lambda'_{m+1})$ et $\mu' = (\mu'_1,\ldots,\mu'_m)$.

Alors (α',β'), respectivement (λ',μ'), est un symbole distingué de $Y^1_{a,1}$, respectivement $Y^1_{b,1}$ avec $a+b=n$.

On pose $A = [\alpha,\beta] = \phi_1^{-1}(\alpha',\beta')$, représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type B_a et $B = [\lambda,\mu] = \phi_1^{-1}(\lambda',\mu')$, représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type B_b. On note $\mathcal{F}$ la famille des représentations du produit des deux groupes de Weyl précédents à laquelle appartient $A \boxtimes B$.

D'après le lemme 4.5, il existe $s \in T^*$ tel que $W_s \subset W$ soit de type $B_a \times B_b$.

Alors $(s,\mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$ correspond à une classe spéciale isolée C de G^* et $\Phi_G(C) = O$, en effet, par la démonstration de la proposition 2.11, $\psi_B(E'_C) = \phi_1(A) + \phi_1(B) = Spr_B(O)$.

Il reste à voir que cette classe vérifie l'hypothèse $(*)$.

D'après le paragraphe 3.3, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée pour $A \boxtimes B$ si et seulement si, dans $\phi_1(A)$ et dans $\phi_1(B)$, s'il y a une égalité à un emplacement dans un des deux symboles alors, dans l'autre, il y a une égalité ou une différence de 1. Ceci est bien réalisé par les choix faits de $\phi_1(A) = (\alpha', \beta')$ et de $\phi_1(B) = (\lambda', \mu')$, en effet, il s'agit de montrer :

$\star$ $a_{i+1} - \lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - 1 - (b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor - 1) = 0$ implique $\lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - \lfloor b_i/2 \rfloor = 0$ ou 1.

$\star$ $\lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - \lfloor b_i/2 \rfloor = 0$ implique $a_{i+1} - \lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - 1 - (b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor - 1) = 0$ ou 1.

$\star$ $b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor - 1 - (a_i - \lfloor a_i/2 \rfloor - 1) = 0$ implique $\lfloor b_i/2 \rfloor - \lfloor a_i/2 \rfloor = 0$ ou 1.

$\star$ $\lfloor b_i/2 \rfloor - \lfloor a_i/2 \rfloor = 0$ implique $b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor - 1 - (a_i - \lfloor a_i/2 \rfloor - 1) = 0$ ou 1.

Ces implications étant toujours vraies, la classe proposée vérifie l'hypothèse $(*)$.

4.2.3 Le type C_n

Si G est de type C_n, si O est une classe unipotente de G, posons alors $(U, V) = Spr_C(O) \in D^{1,1}_{n,1}$.

D'après la démonstration de la proposition 2.18, il s'agit de trouver $[\alpha, \beta]$ et $[\lambda, \mu]$ tels que :

(a) $D + \phi_1[\lambda, \mu] = Spr_C(O)$ (le D étant celui défini dans la démonstration de la proposition 2.11 à partir de $\phi_0[\alpha, \beta]$).

(b) $[\alpha, \beta]$ soit une représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type D_a et $[\lambda, \mu]$ soit une représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type C_b avec $a + b = n$ (a et b seront fixés par la condition précédente, qui impose $a + b = n$).

(c) il existe $s \in T^*$ tel que $W_s \subset W$ soit de type $D_a \times C_b$.

(d) l'hypothèse $(*)$ soit vérifiée pour $[\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu]$.

On suppose que $U = (a_1, \ldots, a_{m+1})$ et $V = (b_1, \ldots, b_m)$ et $a_1 = 0$, quitte à remplacer m par $m + 1$.

On a deux cas à étudier :

• $\delta_C(O) = 0$, par le théorème 1.21, cela signifie que, avec les notations de ce théorème, toutes les classes d'équivalence sur Z, autre que celle de 0, sont de cardinal pair. Cela signifie que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ $a_{i+1} = b_i$ ou $a_{i+1} = b_i + 1$, on a donc aussi $a_i < b_i$.

On définit alors :

$$\begin{cases} \alpha'_i = i - 1 & \text{pour } i \in \{1, \dots, m\} \\ \lambda'_i = a_i - (i-1) & \text{pour } i \in \{1, \dots, m+1\} \\ \beta'_i = i - 1 & \text{pour } i \in \{1, \dots, m\} \\ \mu'_i = b_i - i & \text{pour } i \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

Posons $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_m)$, $\beta' = (\beta'_1, \dots, \beta'_m)$, $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{m+1})$ et $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_m)$.

Alors (α', β'), respectivement (λ', μ'), est un symbole distingué de $Y^1_{a,0}$, respectivement de $Y^1_{b,1}$ avec $a + b = n$.

Remarquons que (α', β') est dégénéré et que, étant donné ce symbole, $a = 0$ et $b = n$.

On pose $A = [\alpha, \beta] = \phi_0^{-1}(\alpha', \beta')$, représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type $D_a = D_0$ et $B = [\lambda, \mu] = \phi_1^{-1}(\lambda', \mu')$, représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type $C_b = C_n$. On note $\mathcal{F}$ la famille des représentations de W contenant B.

Il existe $s \in T^*$ tel que $W_s \subset W$ soit de type $D_a \times C_b = C_n$: il suffit de prendre s égal à l'élément neutre de G^*.

Alors $(s, \mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$ correspond à une classe spéciale isolée C de G^* et $\Phi_G(C) = O$, en effet, par la démonstration de la proposition 2.18, $\psi_C(E'_C) = D + \phi_1(B) = Spr_C(O)$ (D est défini dans la démonstration de la proposition 2.18 à partir de $\phi_0(A)$).

Il reste à voir que cette classe vérifie l'hypothèse $(*)$.

D'après le paragraphe 3.4.2, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée pour $A \boxtimes B$ si et seulement si, avec les notations de ce paragraphe, $2|Z/\sim| = |Z_B| + 1$.

Comme, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ $a_{i+1} = b_i$ ou $a_{i+1} = b_i + 1$, on a aussi $a_i < b_i$.

On en déduit :

$$|Z/\sim| = m - |\{i \in \{1, \dots, m\}, a_{i+1} = b_i\}| - |\{i \in \{2, \dots, m\}, a_i + 1 = b_i\}| + \varepsilon$$

avec $\varepsilon = 1$ si $b_1 > 1$ et 0 sinon. Effectivement, on compte chaque b_i (car a_{i+1} est soit égal à b_i soit dans la même classe dans Z) ; si $a_{i+1} = b_i$, on ne doit pas compter ce b_i qui n'est pas dans Z ; si $a_i+1=b_i$, alors $b_{i-1}+2=a_i+1=b_i$, et donc b_{i+1} et b_i sont dans la même classe d'équivalence de Z et il ne faut compter cette classe qu'une seule fois ; enfin, il faut rajouter la classe de 0, si celle-ci n'a pas été comptée avec la classe de b_1.

On a ensuite :

$$|Z_B| = 2m+1-2|\{i \in \{1,\dots,m\}, a_{i+1}=b_i\}|-2|\{i \in \{1,\dots,m\}, a_i+1=b_i\}|$$

$$= 2m+1-2|\{i \in \{1,\dots,m\}, a_{i+1}=b_i\}|-2|\{i \in \{2,\dots,m\}, a_i+1=b_i\}|-2(1-\varepsilon)$$

Effectivement, on compte tous les $\lambda'_i = a_i-(i-1)$ et les $\mu'_i = b_i - i$ mais on ne doit pas compter ceux pour lesquels $\lambda'_i=\mu'_i$ ou $\mu'_i=\lambda'_{i+1}$.

Ainsi $2|Z/\sim| = |Z_B|+1$, donc la classe proposée vérifie l'hypothèse $(*)$.

• $\delta_C(O)=1$, par le théorème 1.21, cela signifie, avec les notations de ce théorème, qu'il existe une classe d'équivalence sur Z, autre que celle de 0, de cardinal impair. Cela signifie qu'il existe $i \in \{1,\dots,m\}$ tel que $a_{i+1} > b_i+1$.

On définit alors :

$$\begin{cases} \lambda'_i = \lfloor a_i/2 \rfloor & \text{pour } i \in \{1,\dots,m+1\} \\ \alpha'_i = a_{i+1} - \lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - 1 & \text{pour } i \in \{1,\dots,m\} \\ \mu'_i = \lfloor b_i/2 \rfloor & \text{pour } i \in \{1,\dots,m\} \\ \beta'_i = b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor - 1 & \text{pour } i \in \{1,\dots,m\} \end{cases}$$

Posons $\alpha' = (\alpha'_1,\dots,\alpha'_m)$, $\beta'=(\beta'_1,\dots,\beta'_m)$, $\lambda'=(\lambda'_1,\dots,\lambda'_{m+1})$ et $\mu' = (\mu'_1,\dots,\mu'_m)$.

Alors (α',β'), respectivement (λ',μ'), est un symbole distingué de $Y^1_{a,0}$, respectivement de $Y^1_{b,1}$ avec $a+b=n$.

On pose $A=[\alpha,\beta]=\phi_0^{-1}(\alpha',\beta')$, représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type D_a et $B=[\lambda,\mu]=\phi_1^{-1}(\lambda',\mu')$, représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type C_b. On note $\mathcal{F}$ la famille des représentations du produit des deux groupes de Weyl précédents à laquelle appartient $A \boxtimes B$.

D'après le lemme 4.5, il existe $s \in T^*$ tel que $W_s \subset W$ soit de type $D_a \times C_b$.

Alors $(s,\mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$ correspond à une classe spéciale isolée C de G^* et $\Phi_G(C)=O$, en effet, par la démonstration de la proposition 2.18, $\psi_C(E'_C) = D+\phi_1(B) = Spr_C(O)$ (D est défini dans la démonstration de la proposition 2.18 à partir de $\phi_0(A)$).

Il reste à voir que cette classe vérifie l'hypothèse $(*)$.

Remarquons tout d'abord que A n'est pas dégénéré car comme on l'a noté : il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $a_{i+1} > b_i + 1$.

D'après le paragraphe 3.4.2, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée pour $A \boxtimes B$ si et seulement si :

$\star$ $\alpha_i + i - 1 - (\beta_i + i - 1) = 0$ implique $\lambda_{i+1} + i - (\mu_i + i - 1) = 0$ ou 1.

$\star$ $\lambda_{i+1} + i - (\mu_i + i - 1) = 0$ implique $\alpha_i + i - 1 - (\beta_i + i - 1) = 0$ ou 1.

$\star$ $\beta_{i+1} + i - (\alpha_i + i - 1) = 0$ implique $\mu_{i+1} + i - (\lambda_{i+1} + i) = 0$ ou 1.

$\star$ $\mu_{i+1} + i - (\lambda_{i+1} + i) = 0$ implique $\beta_{i+1} + i - (\alpha_i + i - 1) = 0$ ou 1.

Ceci se traduit par :

$\star$ $a_{i+1} - \lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - 1 - (b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor - 1) = 0$ implique $\lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - \lfloor b_i/2 \rfloor = 0$ ou 1.

$\star$ $\lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - \lfloor b_i/2 \rfloor = 0$ implique $a_{i+1} - \lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - 1 - (b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor - 1) = 0$ ou 1.

$\star$ $b_{i+1} - \lfloor b_{i+1}/2 \rfloor - 1 - (a_{i+1} - \lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - 1) = 0$ implique $\lfloor b_{i+1}/2 \rfloor - \lfloor a_{i+1}/2 \rfloor = 0$ ou 1.

$\star$ $\lfloor b_{i+1}/2 \rfloor - \lfloor a_{i+1}/2 \rfloor = 0$ implique $b_{i+1} - \lfloor b_{i+1}/2 \rfloor - 1 - (a_{i+1} - \lfloor a_{i+1}/2 \rfloor - 1) = 0$ ou 1.

Ces implications étant toujours vraies, la classe proposée vérifie l'hypothèse $(*)$.

4.2.4 Le type D_n

Si G est de type D_n, si O est une classe unipotente de G, posons alors $(U, V) = Spr_D(O) \in D^2_{n,0}$.

D'après la démonstration de la proposition 2.26, il s'agit de trouver $[\alpha, \beta]$ et $[\lambda, \mu]$ tels que :

(a) $\phi_0[\alpha, \beta] + \phi_0[\lambda, \mu] = Spr_D(O)$ (démonstration de la proposition 2.26).

(b) $[\alpha, \beta]$ soit une représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type D_a et $[\lambda, \mu]$ soit une représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type D_b avec $a + b = n$ (a et b seront fixés par la condition précédente, qui impose $a + b = n$).

(c) il existe $s \in T^*$ tel que $W_s \subset W$ soit de type $D_a \times D_b$.

(d) l'hypothèse $(*)$ soit vérifiée pour $[\alpha, \beta] \boxtimes [\lambda, \mu]$.

On suppose que $U = (a_1, \ldots, a_m)$ et $V = (b_1, \ldots, b_m)$ et quitte à échanger U et V que $b_1 \leq a_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_m \leq a_m$.

On a deux cas à étudier :

- $\delta_D(O) = 0$, par le théorème 1.28, cela signifie que, avec les notations de ce théorème, toutes les classes d'équivalence sur Z, autre que celle de 0, sont de cardinal pair. Cela signifie que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ $a_i = b_i$ ou $a_i = b_i + 1$, on a donc aussi $a_{i-1} < b_i$.

On définit alors :

$$\begin{cases} \alpha'_i = i - 1 & \text{pour } i \in \{1, \ldots, m\} \\ \lambda'_i = a_i - (i-1) & \text{pour } i \in \{1, \ldots, m\} \\ \beta'_i = i - 1 & \text{pour } i \in \{1, \ldots, m\} \\ \mu'_i = b_i - (i-1) & \text{pour } i \in \{1, \ldots, m\} \end{cases}$$

Posons $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$, $\beta' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$, $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ et $\mu' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_m)$.

Alors (α', β'), respectivement (λ', μ'), est un symbole distingué de $Y^1_{a,0}$, respectivement de $Y^1_{b,0}$ avec $a + b = n$.

Remarquons que (α', β') est dégénéré et que, étant donné ce symbole, $a = 0$ et $b = n$.

On pose $A = [\alpha, \beta] = \phi_0^{-1}(\alpha', \beta')$, représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type $D_a = D_0$ et $B = [\lambda, \mu] = \phi_0^{-1}(\lambda', \mu')$, représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type $D_b + D_n$. On note $\mathcal{F}$ la famille des représentations de W contenant B.

Il existe $s \in T^*$ tel que $W_s \subset W$ soit de type $D_a \times D_b = D_n$: il suffit de prendre s égal à l'élément neutre de G^*.

Remarquons que A est dégénéré et que, étant donné le symbole correspondant à A, $a = 0$ et donc s est, en fait, central et donc peut être choisi égal au neutre de G^*.

Alors $(s, \mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$ correspond à une classe spéciale isolée C de G^* et $\Phi_G(C) = O$, en effet, par la démonstration de la proposition 2.26, $\psi_D(E'_C) = \phi_0(A) + \phi_0(B) = Spr_D(O)$.

Il reste à voir que cette classe vérifie l'hypothèse $(*)$.

D'après le paragraphe 3.5.2, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée pour $A \boxtimes B$ si et seulement si B est dégénéré ou bien, avec les notations de ce paragraphe, $2|Z/\sim| = |Z_B|$.

Si B est dégénéré (ce qui signifie que $(U, V) = Spr_D(C)$ est dégénéré), l'hypothèse $(*)$ est automatiquement vérifiée.

Supposons donc que B est non dégénéré (ce qui signifie que $(U, V) = Spr_D(C)$ est non dégénéré), il faut voir $2|Z/\sim| = |Z_B|$.

On a remarqué précédemment que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $a_{i-1} < b_i$.

On en déduit :

$$|Z/\sim| = m - |\{i \in \{1, \ldots, m\}, a_i = b_i\}| - |\{i \in \{2, \ldots, m\}, a_{i-1} + 1 = b_i\}|$$

Effectivement, on compte chaque b_i (car a_i est soit égal à b_i soit dans la même classe dans Z) ; si $a_i = b_i$, on ne doit pas compter ce b_i qui n'est pas dans Z ; si $a_{i-1} + 1 = b_i$, alors $b_{i-1} + 2 = a_i + 1 = b_i$, et donc b_{i-1} et b_i sont dans la même classe d'équivalence de Z et il ne faut compter cette classe qu'une seule fois.

On a ensuite :

$$|Z_B| = 2m - 2|\{i \in \{1, \ldots, m\}, a_i = b_i\}| - 2|\{i \in \{2, \ldots, m\}, a_{i-1} + 1 = b_i\}|$$

Effectivement, on compte tous les $\lambda'_i = a_i - (i-1)$ et les $\mu'_i = b_i - (i-1)$ mais on ne doit pas compter ceux pour lesquels $\lambda'_i = \mu'_i$ ou $\lambda'_{i-1} = \mu'_i$.

Ainsi $2|Z/\sim| = |Z_B|$, donc la classe proposée vérifie l'hypothèse $(*)$.

• $\delta_D(O) = 1$, par le théorème 1.28, cela signifie, avec les notations de ce théorème, qu'il existe une classe d'équivalence sur Z, autre que celle de 0, de cardinal impair. Cela signifie qu'il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $a_i > b_i + 1$.

On définit alors :

$$\begin{cases} \lambda'_i = \lfloor a_i/2 \rfloor & \text{pour } i \in \{1, \ldots, m\} \\ \alpha'_i = a_i - \lfloor a_i/2 \rfloor & \text{pour } i \in \{1, \ldots, m\} \\ \mu'_i = \lfloor b_i/2 \rfloor & \text{pour } i \in \{1, \ldots, m\} \\ \beta'_i = b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor & \text{pour } i \in \{1, \ldots, m\} \end{cases}$$

Posons $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$, $\beta' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$, $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ et $\mu' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_m)$.

Alors (α', β'), respectivement (λ', μ'), est un symbole distingué de $Y^1_{a,0}$, respectivement de $Y^1_{b,0}$ avec $a + b = n$.

On pose $A = [\alpha, \beta] = \phi_0^{-1}(\alpha', \beta')$, représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type D_a et $B = [\lambda, \mu] = \phi_0^{-1}(\lambda', \mu')$, représentation spéciale d'un groupe de Weyl de type D_b. On note $\mathcal{F}$ la famille des représentations du produit des deux groupes de Weyl précédents à laquelle appartient $A \boxtimes B$.

D'après le lemme 4.5, il existe $s \in T^*$ tel que $W_s \subset W$ soit de type $D_a \times D_b$.

Alors $(s, \mathcal{F}) \in \mathcal{P}(G)$ correspond à une classe spéciale isolée C de G^* et $\Phi_G(s, \mathcal{F}) = C$, en effet, par la démonstration de la proposition 2.26, $\psi_D(E'_C) = \phi_0(A) + \phi_0(B) = Spr_D(O)$.

Il reste à voir que cette classe vérifie l'hypothèse $(*)$.

Remarquons tout d'abord que A n'est pas dégénéré car comme on l'a noté : il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $a_i > b_i + 1$.

D'après le paragraphe 3.5.2, l'hypothèse $(*)$ est vérifiée pour $A \boxtimes B$ si et seulement si :

$\star$ $\alpha_i + i - 1 - (\beta_i + i - 1) = 0$ implique $\lambda_i + i - 1 - (\mu_i + i - 1) = 0$ ou 1.

$\star$ $\lambda_i + i - 1 - (\mu_i + i - 1) = 0$ implique $\alpha_i + i - 1 - (\beta_i + i - 1) = 0$ ou 1.

$\star$ $\beta_{i+1} + i - (\alpha_i + i - 1) = 0$ implique $\mu_{i+1} + i - (\lambda_i + i - 1) = 0$ ou 1.

$\star$ $\mu_{i+1} + i - (\lambda_i + i - 1) = 0$ implique $\beta_{i+1} + i - (\alpha_i + i - 1) = 0$ ou 1.

Ceci se traduit par :

$\star$ $a_i - \lfloor a_i/2 \rfloor - (b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor - 1) = 0$ implique $\lfloor a_i/2 \rfloor - \lfloor b_i/2 \rfloor = 0$ ou 1.

$\star$ $\lfloor a_i/2 \rfloor - \lfloor b_i/2 \rfloor = 0$ implique $a_i - \lfloor a_i/2 \rfloor - (b_i - \lfloor b_i/2 \rfloor - 1) = 0$ ou 1.

$\star$ $b_{i+1} - \lfloor b_{i+1}/2 \rfloor - (a_i - \lfloor a_i/2 \rfloor) = 0$ implique $\lfloor b_{i+1}/2 \rfloor - \lfloor a_i/2 \rfloor = 0$ ou 1.

$\star$ $\lfloor b_{i+1}/2 \rfloor - \lfloor a_i/2 \rfloor = 0$ implique $b_{i+1} - \lfloor b_{i+1}/2 \rfloor - 1 - (a_i - \lfloor a_i/2 \rfloor) = 0$ ou 1.

Ces implications étant toujours vraies, la classe proposée vérifie l'hypothèse $(*)$.

Ainsi, si G est de type A_n, B_n, C_n ou D_n, on a trouvé explicitement une classe spéciale C de G^* vérifiant l'hypothèse $(*)$ et telle que $\Phi_G(C) = O$, où O est une classe unipotente fixée de G.

4.3 F-stabilité dans le théorème B

On fixe donc une classe unipotente O de G F-stable et l'on souhaite montrer que la paire $(s, \mathcal{F})$ ou de manière équivalente la classe spéciale C de G^* proposée précédemment est F-stable.

4.3.1 Le type A_{n-1}

Dans ce cas, on peut toujours choisir $(s, \mathcal{F})$ avec $s = 1$. La F-stabilité est évidente d'après le paragraphe 4.1.1.

4.3.2 Le type B_n

D'après le lemme 4.5, il existe $s \in T^*$ dont la W-orbite est F-stable tel que W_s soit de type $B_a \times B_b$. Ainsi la famille $\mathcal{F}$ proposée dans le paragraphe 4.2.2 est ϕ_F-stable. En effet, pour chacune des deux composantes connexes, toute représentation est stable par le paragraphe 4.1.1. De plus, ϕ_F n'échange pas les deux composantes connexes. En fait, en examinant le paragraphe contenant le lemme 4.5, on a que s peut être choisi F-stable, et donc $\phi_F = F$ et le résultat sur la F-stabilité est clair.

4.3.3 Le type C_n

• $\delta_C(O) = 0$, alors la paire proposée dans le paragraphe 4.2.3 est F-stable en prenant $s = 1$, alors $\phi_F = F$. La famille $\mathcal{F}$ est alors une famille de représentations de $W_a \times W_b = W_b$ de type B_b, groupe pour lequel toutes les représentations sont F-stables (paragraphe 4.1.1).

• $\delta_C(O) = 1$, d'après le lemme 4.5, il existe $s \in T^*$ dont la W-orbite est F-stable tel que W_s soit de type $D_a \times C_b$. Ainsi la famille $\mathcal{F}$ proposée dans le paragraphe 4.2.3 est ϕ_F-stable car la représentation proposée pour la partie D_a est non dégénérée (paragraphe 4.1.1).

4.3.4 Le type D_n

• $\delta_D(O) = 0$, tout d'abord, on peut prendre $s = 1$, comme nous l'avons remarqué dans le paragraphe 4.2.4. Alors ϕ_F agit sur $W_s = W$ comme le Frobenius F. La famille $\mathcal{F}$ est alors une famille de représentation de $W_a \times W_b = W_b$ de type D_b. Dans le cas du Frobenius standard, il est immédiat que $\mathcal{F}$ est F-stable (paragraphe 4.1.1). Etudions donc le cas du Frobenius tordu, c'est-à-dire de G^F de type ${}^2D_n$. La famille $\mathcal{F}$ est F-stable si et seulement si (λ', μ') est non dégénéré (paragraphe 4.1.1). Si c'est le cas, on a terminé.

Etudions donc le cas où le symbole (λ', μ') est dégénéré, ce qui est équivalent à ce que le symbole $Spr_D(O)$ est dégénéré. Ceci revient à dire, par la définition de Spr_D, que O est paramétrée par une partition de $2n$ n'ayant que des parts de longueur paire. Mais une telle classe unipotente O n'est pas F-stable, ce qui termine la démonstration.

En effet, d'après [13, paragraphe C], si G' est un groupe algébrique du même type que G mais sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, alors il existe un automorphisme $F_0 : G' \longrightarrow G'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_{G'} & \xrightarrow{\pi_G} & X_G \\ \downarrow{\scriptstyle F_0} & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ X_{G'} & \xrightarrow{\pi_G} & X_G \end{array}$$

où $\pi_G : X_{G'} \longrightarrow X_G$ est l'application de Spaltenstein de l'ensemble partiellement ordonné des classes unipotentes de G' dans l'ensemble partiellement ordonné des classes unipotentes de G.

De plus, F_0 et F agissent de la même manière sur les diagrammes de Dynkin de G' et G. Les classes unipotentes F_0-stables de G' sont les classes dont la paramétrisation par un diagramme de Dynkin pondéré [3, paragraphe 13.1] est invariante par l'action de F_0 sur ce diagramme.

D'après [3, page 396], en caractéristique nulle, si $O' \in X_{G'}$ est paramétrée par une partition de $2n$ n'ayant que des parts de longueur paire alors O' n'est pas F_0-stable, et donc si $O \in X_G$ est paramétrée par une partition de $2n$ n'ayant que des parts de longueur paire alors O n'est pas F-stable. On peut résumer cela par, en bonne caractéristique, cela se passe comme en caractéristique nulle. Nous utiliserons à nouveau cet argument dans le chapitre suivant.

• $\delta_D(O) = 1$, d'après le lemme 4.5, il existe $s \in T^*$ dont la W-orbite est F-stable tel que W_s soit de type $D_a \times D_b$. Ainsi la famille $\mathcal{F}$ proposée dans le paragraphe 4.2.4 est ϕ_F-stable car :

(a) la représentation proposée pour la partie D_a est non dégénérée (paragraphe 4.1.1).

(b) la représentation proposée pour la partie D_b est non dégénérée (paragraphe 4.1.1).

(c) ϕ_F n'échange pas les deux composantes.

Chapitre 5

Théorème B pour les groupes exceptionnels

Sommaire

Dans ce chapitre, nous allons montrer le théorème B pour les groupes exceptionnels. On rappelle que l'on travaille toujours en bonne caractéristique. Nous allons utiliser le système `CHEVIE` [12] sous le logiciel `GAP`. Par ailleurs, nous traiterons tout d'abord le cas ${}^3D_4$, puis les autres groupes exceptionnels de type G_2, F_4 et E_n.

5.1 Méthode de résolution du problème pour les groupes exceptionnels

Pour cela, on va étudier pour chaque type exceptionnel toutes les classes unipotentes de G (voir [3, chapitre 13]). Remarquons que, dans les cas G_2, F_4 et E_n, toutes les classes unipotentes de G sont F-stables. En effet, d'après l'argument explicité à la page 103, en bonne caractéristique, cela se passe comme en caractéristique nulle et d'après [3, pages 401 à 407], en caractéristique nulle, toutes les classes unipotentes sont F-stables car les diagrammes de Dynkin pondérés sont invariants par l'action du Frobenius.

On rappelle que l'on numérote les sommets du diagramme de Dynkin comme cela est indiqué à la page 16.

Tout d'abord, comme nous allons le voir dans la suite, on peut très souvent prendre $s = 1$ et $W_s = W$ pour obtenir une paire isolée F-stable, ou de manière équivalente une classe spéciale isolée F-stable de G^*, vérifiant l'hypothèse $(*)$ associée à une classe unipotente.

Pour les autres classes qui posent plus de problèmes (qui sont relativement peu nombreuses), nous les traiterons une par une et cela de manière analogue à ce qui a été fait pour la classe posant problème dans le type ${}^3D_4$: avec l'aide de `GAP` et de `CHEVIE` [12], on détermine un sous groupe W_s de W qui pourrait être candidat pour jouer le rôle de W_s et une famille $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Irr}(W_s)$. Il nous reste ensuite à montrer qu'il existe $s \in T^*$ dont la W-orbite est F-stable dont le centralisateur admet W_s comme groupe de Weyl.

Pour trouver le W_s candidat, on utilise [5, proposition 2.3.4] ainsi que les résultats de cet article ou de [4].

Enfin pour montrer l'existence de $s \in T^*$, tore maximal de G^* (groupe simple simplement connexe car G est de type adjoint) dont la W-orbite est F-stable et dont le centralisateur admet W_s comme groupe de Weyl, on utilisera [5] ou [4] en gardant à l'esprit que l'identification entre W et W^* échange les racines longues et les racines courtes.

Il reste ensuite à montrer que $\mathcal{F}$, famille de représentation de W_s est ϕ_F-stable.

Pour chaque type de groupes exceptionnels, pour chaque classe unipotente O de G, on va donner un W_s, ainsi qu'un caractère spécial E_C de W_s (qui nous détermine la famille $\mathcal{F}$) vérifiant $\Phi_G(s, \mathcal{F}) = O$ et l'hypothèse $(*)$. Les points à vérifier sont alors :

1. L'existence de $s \in T^*$ dont la W-orbite soit F-stable tel que W_s soit de type voulu.

   Cela découle directement de l'existence de $s' \in G^*$ F-stable tel que $W_{s'}$ soit de type voulu qui vient de [5] et [4] (on rappelle que l'on travaille en bonne caractéristique) (voir [5, théorème 1.5.1]).

2. La ϕ_F-stabilité de $\mathcal{F}$.

(a) Si ϕ_F laisse stable une composante connexe $\tilde{W}$ du diagramme de Dynkin de W_s alors ϕ_F agit comme un Frobenius sur $\tilde{W}$.

Dans les cas du Frobenius standard (trivial sur $\tilde{W}$), c'est-à-dire $\tilde{W}$ muni du Frobenius ϕ_F de type A_{n-1}, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4 et E_n ($n = 6,\ 7,\ 8$), toutes les représentations du groupe de Weyl de G sont F-stables.

Dans le cas où $(\tilde{W}, \phi_F)$ est de type ${}^2A_{n-1}$ ou ${}^2E_6$, toutes les représentations de $\tilde{W}$ sont ϕ_F-stables car le Frobenius agit comme un automorphisme intérieur.

Reste le cas où $(\tilde{W}, \phi_F)$ est de type ${}^2D_n$ (le cas ${}^3D_4$ ne se produira jamais), la représentation proposée sera non dégénérée.

(b) Si ϕ_F permute les composantes connexes du diagramme de Dynkin de W_s, la représentation proposée est ϕ_F-stable car les sous-représentations proposées pour ces composantes seront identiques donc la représentation produit sera ϕ_F-stable.

Remarque 5.1 Concernant l'action de ϕ_F sur les composantes de W_s, on constate que la seule situation où W_s a des composantes du même type qui pourraient éventuellement être échangées, c'est quand ces composantes sont toutes du type A. Cela ne pose alors pas de problèmes pour les arguments ultérieurs (chapitre 6), car en type A, on a toujours $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \{1\}$.

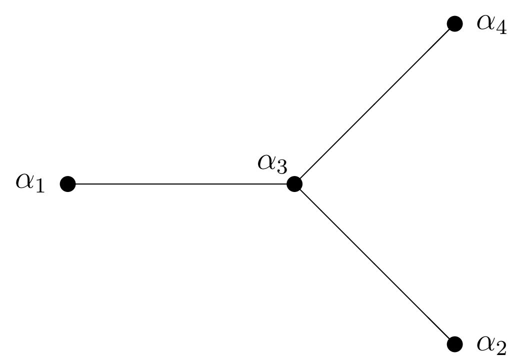
5.2 G^F de type ${}^3D_4$

On suppose G^F est de type ${}^3D_4$. Soit O une classe unipotente de G.

La première partie du théorème B a déjà été montrée lorsque l'on a traité le cas G de type D_n, on peut donc supposer O F-stable.

Pour traiter ce cas, on s'aide du système `CHEVIE` sous le logiciel `GAP`.

Si G^F est de type ${}^3D_4$, alors le Frobenius agit sur le système de générateurs du groupe de Weyl W de G comme suit :



★ Effectuons une première approche du problème en énumérant les classes unipotentes F-stables de G et en donnant la représentation de W correspondant via la correspondance de Springer.

Partition de O	$A(u)$	Paire de partitions	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$	F-stabilité de la représentation
1 7	1	$[4, \varnothing]$	oui	1	oui
3 5	1	$[3, 1]$	oui	1	oui
$1^2\ 3^2$	$\mathfrak{S}_2$	$[12, 1]$	oui	$\mathfrak{S}_2$	oui
$1\ 2^2\ 3$	1	$[22, \varnothing]$	non	$\mathfrak{S}_2$	oui
$1^4\ 2^2$	1	$[111, 1]$	oui	1	oui
1^8	1	$[1111, \varnothing]$	oui	1	oui

Les différentes colonnes sont remplies de la façon suivante :

• “ Partition de O ” : [3, pages 396-397] et argument explicité en page 103, les classes F-stables étant celles dont le diagramme est invariant par l'action de F.

• “ $A(u)$ ” : proposition 1.27.

• “ Paire de partitions ” : paragraphe 1.7.2, il s'agit de la paire de partitions paramétrant la représentation de W correspondant à O via la correspondance de Springer.

• “ Spécial ” : paragraphe 1.7.1.

• “ $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ ” : paragraphe 1.7.1.

• “ F-stabilité de la représentation ” : [20, paragraphe 4.19].

★ Le tableau précédent nous indique que, hormis dans le cas où O est paramétrée par la partition $(1\ 2^2\ 3)$, on peut prendre $s = 1$ ($W_s = W$) et $\mathcal{F}$ la famille contenant la représentation de W correspondant à O via la correspondance de Springer.

★ On s'intéresse donc maintenant à la classe O paramétrée par la partition $(1\ 2^2\ 3)$.

D'après [5], il existe $s \in T^*$ dont la W-orbite est F-stable tel que W_s soit de type $A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$.

Notons $E_C = 11 \boxtimes 11 \boxtimes 11 \boxtimes 11$, représentation spéciale de W_s. E_C est clairement ϕ_F-stable et $b(E_C) = 4$.

Par ailleurs, on a :

$$\mathrm{Ind}_{W_s}^W E_C = [22, \varnothing] + \text{somme de caractères } \tilde{E} \text{ avec } d(\tilde{E}) > 4$$

et

$$b[22, \varnothing] = d[22, \varnothing] = 4$$

Par ailleurs

$$\mathcal{G}_C \simeq A(u) \simeq \{1\}$$

Ainsi, on a montré que $(s, \mathcal{F})$ est une paire vérifiant l'hypothèse $(*)$, F-stable telle que $O = \Phi_G(s, \mathcal{F})$, ce qui termine la démonstration du cas ${}^3D_4$.

5.3 G de type G_2

On suppose G de type G_2.

On rappelle que l'on numérote les sommets du diagramme de Dynkin comme cela est indiqué à la page 16.

On remplit la table suivante à l'aide de la table donnée au chapitre 1, de [3, page 412] et de [20, page 95], la première colonne " ?" indique les classes unipotentes posant problème, c'est-à-dire celles pour lesquelles on ne peut pas prendre $s = 1$. Ce sont les cas qu'il faudra traiter ensuite.

Table 5.2 G de type G_2

?	Classe unipotente	$A(u)$	Caractère de W	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$
	1	1	$\phi_{1,6}$	oui	1
$\longrightarrow$	A_1	1	$\phi''_{1,3}$	non	
$\longrightarrow$	$\tilde{A}_1$	1	$\phi_{2,2}$	non	
	$G_2(A_1)$	$\mathfrak{S}_3$	$\phi_{2,1}$	oui	$\mathfrak{S}_3$
			$\phi'_{1,3}$	non	
	G_2	1	$\phi_{1,0}$	oui	1

On dresse maintenant une table résolvant le cas des deux classes posant problème (le type de W_s est le type de W_s vu comme sous groupe de W) :

Table 5.3 Classes posant problème dans le type G_2

Type de W_s	E_C	E'_C	$\Phi_G(C)$	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
$\tilde{A}_2$	111	$\phi''_{1,3}$	A_1	1	1
$A_1 \times \tilde{A}_1$	$11 \boxtimes 11$	$\phi_{2,2}$	$\tilde{A}_1$	1	1

5.4 G de type F_4

On suppose G de type F_4.

On rappelle que l'on numérote les sommets du diagramme de Dynkin comme cela est indiqué à la page 16.

On remplit la table suivante à l'aide de la table donnée au chapitre 1, de [3, page 414] et de [20, page 96], la première colonne “ ?” indique les classes unipotentes posant problème, c'est-à-dire celles pour lesquelles on ne peut pas prendre $s = 1$. Ce sont les cas qu'il faudra traiter ensuite.

Table 5.4 G de type F_4

?	Classe unipotente	$A(u)$	Caractère de W	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$
	1	1	1_4	oui	1
$\longrightarrow$	A_1	1	2_4	non	
	$\tilde{A}_1$	$\mathfrak{S}_2$	4_5	oui	$\mathfrak{S}_2$
			2_2	non	
	$A_1+\tilde{A}_1$	1	9_4	oui	1
$\longrightarrow$	A_2	$\mathfrak{S}_2$	8_4	oui	1
			1_2	non	
	$\tilde{A}_2$	1	8_2	oui	1
$\longrightarrow$	$A_2+\tilde{A}_1$	1	4_3	non	
$\longrightarrow$	B_2	$\mathfrak{S}_2$	9_2	non	
			4_1	non	
$\longrightarrow$	$\tilde{A}_2+A_1$	1	6_1	non	
$\longrightarrow$	$C_3(a_1)$	$\mathfrak{S}_2$	16	non	
			4_4	non	
	$F_4(a_3)$	$\mathfrak{S}_4$	12	oui	$\mathfrak{S}_4$
			9_3	non	
			6_2	non	
			1_3	non	
	B_3	1	8_1	oui	1
	C_3	1	8_3	oui	1
$\longrightarrow$	$F_4(a_2)$	$\mathfrak{S}_2$	9_1	oui	1
			2_1	non	
	$F_4(a_1)$	$\mathfrak{S}_2$	4_2	oui	$\mathfrak{S}_2$
			2_3	non	
	F_4	1	1_1	oui	1

On dresse maintenant une table résolvant le cas des sept classes posant problème (le type de W_s est le type de W_s vu comme sous groupe de W) :

Table 5.5 Classes posant problème dans le type F_4

Type de W_s	E_C	E'_C	$\Phi_G(C)$	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
C_4	$[\varnothing, 1111]$	2_4	A_1	1	1
C_4	$[1, 111]$	8_4	A_2	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$\tilde{A}_3 \times A_1$	$1111 \boxtimes 11$	4_3	$A_2 + \tilde{A}_1$	1	1
C_4	$[11, 11]$	9_2	B_2	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$A_2 \times \tilde{A}_2$	$111 \boxtimes 111$	6_1	$\tilde{A}_2 + A_1$	1	1
C_4	$[2, 2]$	16	$C_3(a_1)$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
C_4	$[1, 12]$	9_1	$F_4(a_2)$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$

5.5 G de type E_6

On suppose G de type E_6.

On remplit la table suivante à l'aide de la table donnée au chapitre 1, de [3, page 415] et de [20, page 99], la première colonne " ?" indique les classes unipotentes posant problème, c'est-à-dire celles pour lesquelles on ne peut pas prendre $s = 1$. Ce sont les cas qu'il faudra traiter ensuite.

Table 5.6 G de type E_6

?	Classe unipotente	$A(u)$	Caractère de W	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$
	1	1	$1'_p$	oui	1
	A_1	1	$6'_p$	oui	1
	$2A_1$	1	$20'_p$	oui	1
$\longrightarrow$	$3A_1$	1	$15'_q$	non	
	A_2	$\mathfrak{S}_2$	$30'_p$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$15'_p$	non	
	A_2+A_1	1	$64'_p$	oui	1
	$2A_2$	1	$24'_p$	oui	1
	A_2+2A_1	1	$60''_p$	oui	1
	A_3	1	$81'_p$	oui	1
$\longrightarrow$	$2A_2+A_1$	1	10_s	non	
$\longrightarrow$	A_3+A_1	1	60_s	non	
	$D_4(a_1)$	$\mathfrak{S}_3$	80_s	oui	$\mathfrak{S}_3$
			90_s	non	
			20_s	non	
	A_4	1	81_p	oui	1
	D_4	1	24_p	oui	1
	A_4+A_1	1	60_p	oui	1
$\longrightarrow$	A_5	1	15_q	non	
	$D_5(a_3)$	1	64_p	oui	1
	$E_6(a_3)$	$\mathfrak{S}_2$	30_p	oui	$\mathfrak{S}_2$
			15_p	non	
	D_5	1	20_p	oui	1
	$E_6(a_1)$	1	6_p	oui	1
	E_6	1	$1_p1,0$	oui	1

On dresse maintenant une table résolvant le cas des quatre classes posant problème :

Table 5.7 Classes posant problème dans le type E_6

Type de W_s	E_C	E'_C	$\Phi_G(C)$	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
$A_5 \times A_1$	$111111 \boxtimes 11$	$15'_q$	$3A_1$	1	1
$A_2 \times A_2 \times A_2$	$111 \boxtimes 111 \boxtimes 111$	10_s	$2A_2 + A_1$	1	1
$A_5 \times A_1$	$1122 \boxtimes 11$	60_s	$A_3 + A_1$	1	1
$A_5 \times A_1$	$33 \boxtimes 11$	15_q	A_5	1	1

5.6 G de type E_7

On suppose G de type E_7.

On remplit la table suivante à l'aide de la table donnée au chapitre 1, de [3, page 415] et de [20, page 101], la première colonne " ?" indique les classes unipotentes posant problème, c'est-à-dire celles pour lesquelles on ne peut pas prendre $s=1$. Ce sont les cas qu'il faudra traiter ensuite.

Table 5.8 G de type E_7

?	Classe unipotente	$A(u)$	Caractère de W	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$
	1	1	$1'_a$	oui	1
	A_1	1	7_a	oui	1
	$2A_1$	1	$27'_a$	oui	1
	$(3A_1)''$	1	21_b	oui	1
$\longrightarrow$	$(3A_1)'$	1	$35'_b$	non	
	A_2	$\mathfrak{S}_2$	56_a	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$21'_a$	non	
$\longrightarrow$	$4A_1$	1	15_a	non	
	A_2+A_1	$\mathfrak{S}_2$	$120'_a$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			105_a	non	
	A_2+2A_1	1	189_b	oui	1
	A_3	1	$210'_a$	oui	1
	$2A_2$	1	$168'_a$	oui	1
	A_2+3A_1	1	$105'_b$	oui	1
	$(A_3+A_1)''$	1	189_c	oui	1
$\longrightarrow$	$2A_2+A_1$	1	70_a	non	
$\longrightarrow$	$(A_3+A_1)'$	1	$280'_b$	non	
	$D_4(a_1)$	$\mathfrak{S}_3$	315_a	oui	$\mathfrak{S}_3$
			280_a	non	
			35_a	non	
$\longrightarrow$	A_3+2A_1	1	216_a	non	
	D_4	1	$105'_c$	oui	1
	$D_4(a_1)+A_1$	$\mathfrak{S}_2$	$405'_a$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$189'_a$	non	
$\longrightarrow$	A_3+A_2	$\mathfrak{S}_2$	378_a	oui	1
			$84'_a$	non	

à suivre

Suite de G de type E_7

?	Classe unipotente	$A(u)$	Caractère de W	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$
	A_4	$\mathfrak{S}_2$	$420'_a$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			336_a	non	
	$A_3+A_2+A_1$	1	$210'_b$	oui	1
	$(A_5)''$	1	105_c	oui	1
$\longrightarrow$	D_4+A_1	1	84_a	non	
	A_4+A_1	$\mathfrak{S}_2$	$512'_a$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			512_a	non	
	$D_5(a_1)$	$\mathfrak{S}_2$	420_a	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$336'_a$	non	
	A_4+A_2	1	210_b	oui	1
$\longrightarrow$	$(A_5)'$	1	$216'_a$	non	
$\longrightarrow$	A_5+A_1	1	$70'_a$	non	
	$D_5(a_1)+A_1$	1	$378'_a$	oui	1
$\longrightarrow$	$D_6(a_2)$	1	280_b	non	
	$E_6(a_3)$	$\mathfrak{S}_2$	405_a	oui	$\mathfrak{S}_2$
			189_a	non	
	D_5	1	$189'_c$	oui	1
	$E_7(a_5)$	$\mathfrak{S}_3$	$315'_a$	oui	$\mathfrak{S}_3$
			$280'_a$	non	
			$35'_a$	non	
	A_6	1	105_b	oui	1
	D_5+A_1	1	168_a	oui	1
	$D_6(a_1)$	1	210_a	oui	1
$\longrightarrow$	$E_7(a_4)$	$\mathfrak{S}_2$	$189'_b$	oui	1
			$15'_a$	non	
$\longrightarrow$	D_6	1	35_b	non	
	$E_6(a_1)$	$\mathfrak{S}_2$	120_a	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$105'_a$	non	
	E_6	1	$21'_b$	oui	1
	$E_7(a_3)$	$\mathfrak{S}_2$	$56'_a$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			21_a	non	
	$E_7(a_2)$	1	27_a	oui	1
	$E_7(a_1)$	1	$7'_a$	oui	1
	E_7	1	1_a	oui	1

On dresse maintenant une table résolvant le cas des douze classes posant problème :

Table 5.9 Classes posant problème dans le type E_7

Type W_s	E_C	E'_C	$\Phi_G(C)$	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
$D_6 \times A_1$	$[\varnothing, 111111] \boxtimes 11$	$35'_b$	$(3A_1)'$	1	1
A_7	11111111	15_a	$4A_1$	1	1
$A_5 \times A_2$	$111111 \boxtimes 111$	70_a	$2A_2 + A_1$	1	1
$D_6 \times A_1$	$[11, 1111] \boxtimes 11$	$280'_b$	$(A_3 + A_1)'$	1	1
A_7	111122	216_a	$A_3 + 2A_1$	1	1
$D_6 \times A_1$	$[1, 1112] \boxtimes 11$	378_a	$A_3 + A_2$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
A_7	2222	84_a	$D_4 + A_1$	1	1
$D_6 \times A_1$	$[11, 22] \boxtimes 11$	$216'_a$	$(A_5)'$	1	1
$A_5 \times A_2$	$222 \boxtimes 111$	$70'_a$	$A_5 + A_1$	1	1
A_7	1133	280_b	$D_6(a_2)$	1	1
$D_6 \times A_1$	$[2, 13] \boxtimes 11$	$189'_b$	$E_7(a_4)$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
A_7	44	35_b	D_6	1	1

5.7 G de type E_8

On suppose G de type E_8.

On remplit la table suivante à l'aide de la table donnée au chapitre 1, de [3, page 416] et de [20, page 105], la première colonne " ?" indique les classes unipotentes posant problème, c'est-à-dire celles pour lesquelles on ne peut pas prendre $s = 1$. Ce sont les cas qu'il faudra traiter ensuite.

Table 5.10 G de type E_8

?	Classe unipotente	$A(u)$	Caractère de W	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$
	1	1	$1'_x$	oui	1
	A_1	1	$8'_z$	oui	1
	$2A_1$	1	$35'_x$	oui	1
$\longrightarrow$	$3A_1$	1	$84'_x$	non	
	A_2	$\mathfrak{S}_2$	$112'_z$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$28'_x$	non	
$\longrightarrow$	$4A_1$	1	$50'_x$	non	
	A_2+A_1	$\mathfrak{S}_2$	$210'_x$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$160'_z$	non	
	A_2+2A_1	1	$560'_z$	oui	1
	A_3	1	$567'_x$	oui	1
$\longrightarrow$	A_2+3A_1	1	$400'_z$	non	
	$2A_2$	$\mathfrak{S}_2$	$700'_x$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$300'_x$	non	
$\longrightarrow$	$2A_2+A_1$	1	$448'_z$	non	
$\longrightarrow$	A_3+A_1	1	$1344'_x$	non	
	$D_4(a_1)$	$\mathfrak{S}_3$	$1400'_z$	oui	$\mathfrak{S}_3$
			$1008'_z$	non	
			$56'_z$	non	
	D_4	1	$525'_x$	oui	1
$\longrightarrow$	$2A_2+2A_1$	1	$175'_x$	non	
$\longrightarrow$	A_3+2A_1	1	$1050'_x$	non	
	$D_4(a_1)+A_1$	$\mathfrak{S}_3$	$1400'_x$	oui	$\mathfrak{S}_3$
			$1575'_x$	non	
			$350'_x$	non	
$\longrightarrow$	A_3+A_2	$\mathfrak{S}_2$	$3240'_z$	oui	1

à suivre

Suite de G de type E_8

?	Classe unipotente	$A(u)$	Caractère de W	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$
			$972'_x$	non	
	A_4	$\mathfrak{S}_2$	$2268'_x$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$1296'_z$	non	
$\longrightarrow$	$A_3+A_2+A_1$	1	$1400'_{zz}$	non	
$\longrightarrow$	D_4+A_1	1	$700'_{xx}$	non	
	$D_4(a_1)+A_2$	$\mathfrak{S}_2$	$2240'_x$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$840'_z$	non	
	A_4+A_1	$\mathfrak{S}_2$	$4096'_x$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$4096'_z$	non	
$\longrightarrow$	$2A_3$	1	$840'_x$	non	
	$D_5(a_1)$	$\mathfrak{S}_2$	$2800'_z$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$2100'_x$	non	
	A_4+2A_1	$\mathfrak{S}_2$	$4200'_x$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$3360'_z$	non	
	A_4+A_2	1	$4536'_z$	oui	1
$\longrightarrow$	A_5	1	$3200'_x$	non	
	$D_5(a_1)+A_1$	1	$6075'_x$	oui	1
	$A_4+A_2+A_1$	1	$2835'_x$	oui	1
$\longrightarrow$	D_4+A_2	$\mathfrak{S}_2$	$4200'_z$	oui	1
			168_y	non	
	$E_6(a_3)$	$\mathfrak{S}_2$	$5600'_z$	oui	$\mathfrak{S}_2$
			$2400'_z$	non	
	D_5	1	2100_y	oui	1
$\longrightarrow$	A_4+A_3	1	420_y	non	
$\longrightarrow$	A_5+A_1	1	2016_w	non	
$\longrightarrow$	$D_5(a_1)+A_2$	1	1344_w	non	
$\longrightarrow$	$D_6(a_2)$	$\mathfrak{S}_2$	4200_y	non	
			2688_y	non	
$\longrightarrow$	$E_6(a_3)+A_1$	$\mathfrak{S}_2$	3150_y	non	
			1134_y	non	
$\longrightarrow$	$E_7(a_5)$	$\mathfrak{S}_3$	7168_w	non	
			5600_w	non	
			448_w	non	
$\longrightarrow$	D_5+A_1	1	3200_x	non	

à suivre

Suite de G de type E_8

?	Classe unipotente	$A(u)$	Caractère de W	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$
	$E_8(a_7)$	$\mathfrak{S}_5$	4480_y	oui	$\mathfrak{S}_5$
			5670_y	non	
			4536_y	non	
			1680_y	non	
			1400_y	non	
			70_y	non	
	A_6	1	4200_z	oui	1
	$D_6(a_1)$	$\mathfrak{S}_2$	5600_z	oui	$\mathfrak{S}_2$
			2400_z	non	
	A_6+A_1	1	2835_x	oui	1
$\longrightarrow$	$E_7(a_4)$	$\mathfrak{S}_2$	6075_x	oui	1
			700_{xx}	non	
	$E_6(a_1)$	$\mathfrak{S}_2$	2800_z	oui	$\mathfrak{S}_2$
			2100_x	non	
$\longrightarrow$	D_5+A_2	$\mathfrak{S}_2$	4536_z	oui	1
			840_x	non	
$\longrightarrow$	D_6	1	972_x	non	
	E_6	1	525_x	oui	1
	$D_7(a_2)$	$\mathfrak{S}_2$	4200_x	oui	$\mathfrak{S}_2$
			3360_z	non	
$\longrightarrow$	A_7	1	1400_{zz}	non	
	$E_6(a_1)+A_1$	$\mathfrak{S}_2$	4096_z	oui	$\mathfrak{S}_2$
			4096_x	non	
	$E_7(a_3)$	$\mathfrak{S}_2$	2268_x	oui	$\mathfrak{S}_2$
			1296_z	non	
$\longrightarrow$	$E_8(b_6)$	$\mathfrak{S}_3$	2240_x	oui	$\mathfrak{S}_2$
			175_x	non	
			840_z	non	
$\longrightarrow$	$D_7(a_1)$	$\mathfrak{S}_2$	3240_z	oui	1
			1050_x	non	
$\longrightarrow$	E_6+A_1	1	448_z	non	
$\longrightarrow$	$E_7(a_2)$	1	1344_x	non	
	$E_8(a_6)$	$\mathfrak{S}_3$	1400_x	oui	$\mathfrak{S}_3$
			1575_x	non	

à suivre

Suite de G de type E_8

?	Classe unipotente	$A(u)$	Caractère de W	Spécial	$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$
			350_x	non	
$\longrightarrow$	D_7	1	400_z	non	
	$E_8(b_5)$	$\mathfrak{S}_3$	1400_z	oui	$\mathfrak{S}_3$
			1008_z	non	
			56_z	non	
	$E_7(a_1)$	1	567_x	oui	1
	$E_8(a_5)$	$\mathfrak{S}_2$	700_x	oui	$\mathfrak{S}_2$
			300_x	non	
$\longrightarrow$	$E_8(b_4)$	$\mathfrak{S}_2$	560_z	oui	1
			50_x	non	
$\longrightarrow$	E_7	1	84_x	non	
	$E_8(a_4)$	$\mathfrak{S}_2$	210_x	oui	$\mathfrak{S}_2$
			160_z	non	
	$E_8(a_3)$	$\mathfrak{S}_2$	112_z	oui	$\mathfrak{S}_2$
			28_x	non	
	$E_8(a_2)$	1	35_x	oui	1
	$E_8(a_1)$	1	8_z	oui	1
	E_8	1	1_x	oui	1

On dresse maintenant une table résolvant le cas des trente et une classes posant problème :

Table 5.11 Classes posant problème dans le type E_8

Type de W_s	E_C	E'_C	$\Phi_G(C)$	$\mathcal{G}_C$	$A(u)$
$E_7 \times A_1$	$1'_a \boxtimes 11$	$84'_x$	$3A_1$	1	1
D_8	$[\varnothing, 11111111]$	$50'_x$	$4A_1$	1	1
D_8	$[1, 1111111]$	$400'_z$	$A_2 + 3A_1$	1	1
$E_6 \times A_2$	$1'_p \boxtimes 111$	$448'_z$	$2A_2 + A_1$	1	1
$E_7 \times A_1$	$27'_a \boxtimes 11$	$1344'_x$	$A_3 + A_1$	1	1
A_8	111111111	$175'_x$	$2A_2 + 2A_1$	1	1
D_8	$[11, 111111]$	$1050'_x$	$A_3 + 2A_1$	1	1
$E_7 \times A_1$	$56_a \boxtimes 11$	$3240'_z$	$A_3 + A_2$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$A_7 \times A_1$	$11111111 \boxtimes 11$	$1400'_{zz}$	$A_3 + A_2 + A_1$	1	1
$A_7 \times A_1$	$11111111 \boxtimes 2$	$700'_{xx}$	$D_4 + A_1$	1	1
$D_5 \times A_3$	$[\varnothing, 11111] \boxtimes 1111$	$840'_x$	$2A_3$	1	1
$E_7 \times A_1$	$168'_a \boxtimes 11$	$3200'_x$	A_5	1	1
D_8	$[111, 1112]$	$4200'_z$	$D_4 + A_2$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$A_4 \times A_4$	$11111 \boxtimes 11111$	420_y	$A_4 + A_3$	1	1
$A_5 \times A_2 \times A_1$	$111111 \boxtimes 111 \boxtimes 11$	2016_w	$A_5 + A_1$	1	1
$D_5 \times A_3$	$[1, 1111] \boxtimes 1111$	1344_w	$D_5(a_1) + A_2$	1	1
D_8	$[11, 1122]$	4200_y	$D_6(a_2)$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$E_6 \times A_2$	$30'_p \boxtimes 111$	3150_y	$E_6(a_3) + A_1$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$E_7 \times A_1$	$315_a \boxtimes 11$	7168_w	$E_7(a_5)$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$E_7 \times A_1$	$105'_c \boxtimes 11$	3200_x	$D_5 + A_1$	1	1
$E_7 \times A_1$	$420'_a \boxtimes 11$	6075_x	$E_7(a_4)$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
D_8	$[12, 122]$	4536_z	$D_5 + A_2$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$A_7 \times A_1$	$2222 \boxtimes 2$	972_x	D_6	1	1
$E_7 \times A_1$	$210_b \boxtimes 11$	1400_{zz}	A_7	1	1
$E_6 \times A_2$	$80_s \boxtimes 111$	2240_x	$E_8(b_6)$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$
$E_7 \times A_1$	$405_a \boxtimes 11$	3240_z	$D_7(a_1)$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$A_5 \times A_2 \times A_1$	$222 \boxtimes 111 \boxtimes 2$	448_z	$E_6 + A_1$	1	1
$A_5 \times A_2 \times A_1$	$1122 \boxtimes 3 \boxtimes 11$	1344_x	$E_7(a_2)$	1	1
$A_5 \times A_2 \times A_1$	$33 \boxtimes 111 \boxtimes 11$	400_z	D_7	1	1
$E_7 \times A_1$	$120_a \boxtimes 11$	560_z	$E_8(b_4)$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$
$A_7 \times A_1$	$44 \boxtimes 2$	84_x	E_7	1	1

Chapitre 6

Conjecture de Kawanaka

Sommaire

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité de notes rédigées par M. Geck.

Un des points importants de ce chapitre est l'introduction des caractères de Gelfand-Graev généralisés, qui sont un outil de travail primordial dans le sujet nous intéressant.

L'objectif de ce chapitre est de montrer un théorème de décomposition entre les caractères de Gelfand-Graev généralisés et certains caractères irréductibles de G^F, groupe fini. Cela est fait à l'aide des résultats obtenus précédemment et on en déduira plusieurs corollaires dont une conjecture de Kawanaka (théorème C).

6.1 Cadre et théorème principal

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. On suppose que G est défini sur $\mathbb{F}_q$ où q est une puissance de p et on pose $F : G \longrightarrow G$ l'endomorphisme de Frobenius correspondant. On suppose aussi dans tout ce chapitre que G a un centre connexe et que p est une bonne caractéristique pour G.

Dans [16], N. Kawanaka a montré qu'en bonne caractéristique, à chaque élément unipotent $u \in G^F$, on peut associer un caractère Γ_u appelé caractère de Gelfand-Graev généralisé. Ils sont obtenus par induction de certains caractères de radicaux unipotents de certains sous groupes paraboliques de G. Dans les cas extrêmes où u est trivial ou régulier, on obtient le caractère de la représentation régulière ou, respectivement, un caractère de Gelfand-Graev ordinaire. Pour quelques rappels sur la construction de ces caractères de Gelfand-Graev généralisés, on pourra se reporter à l'annexe B. Ces caractères sont liés à la géométrie des classes unipotentes de G et au problème de calcul des valeurs des caractères irréductibles de G^F sur les éléments unipotents.

Soient $u_1, \ldots, u_n \in G^F$ des représentants des classes unipotentes de G^F et $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ les caractères de Gelfand-Graev généralisés associés. On note (u_i) la G-classe de u_i. On suppose que les classes unipotentes de G^F sont ordonnées de façon à ce que si la dimension de (u_i) est inférieure strictement à la dimension de (u_j) alors $i < j$. Notant $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire hermitien usuel sur les fonctions de classes de G^F, on formule le théorème suivant.

Théorème 6.1 *Supposons que p et q soient suffisamment grands. Alors il existe des caractères irréductibles $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de G^F tels que la matrice des produits scalaires $(\langle \rho_i, \Gamma_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ soit triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale. De plus, on peut s'arranger pour avoir $\langle \rho_i, \Gamma_j \rangle = \delta_{ij}$ si les G-classes de conjugaison de u_i et de u_j sont égales.*

Les conditions sur p et q viennent du fait que l'on utilise les résultats de [25], qui ne sont démontrés que sous ces hypothèses. Il semblerait probable cependant, qu'ils restent vrais sous l'unique condition p bon pour G.

6.2 Réduction du problème

6.2.1 Un résultat sur le passage au quotient

Soit $\pi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes algébriques surjectif dont le noyau $\mathrm{Ker}\pi = S$ est central. Alors π réalise une bijection de l'ensemble des classes unipotentes de G sur l'ensemble des classes unipotentes de G'.

Proposition 6.2 *Soit $u \in G$ un élément unipotent de G alors $u' = \pi(u)$ est un élément unipotent de G'. Alors, on a $S \subset C_G(u)$, donc on note $\overline{S}$, l'image de S dans le quotient $C_G(u)/C_G(u)^\circ$. Alors $C_{G'}(u')/C_{G'}(u')^\circ$ est isomorphe à $C_G(u)/C_G(u)^\circ/\overline{S}$.*

Démonstration

Tout d'abord $\pi(C_G(u)) \subset C_{G'}(u')$. En effet, si $g \in C_G(u)$, $\pi(g)u' = \pi(g)\pi(u) = \pi(gu) = \pi(ug) = \pi(u)\pi(g) = u'\pi(g)$, d'où le résultat.

Ensuite $\pi(C_G(u)) = C_{G'}(u')$. En effet, si $g' \in C_{G'}(u')$, alors, comme π est surjectif $g' = \pi(g)$ avec $g \in G$. Comme $\pi(ug) = \pi(u)\pi(g) = u'g' = g'u' = \pi(g)\pi(u) = \pi(gu)$, on a $ug = gus$ avec $s \in S$ donc $g^{-1}ug = us = su$. Comme $g^{-1}ug$ est unipotent et que $us = su$ est sa décomposition de Jordan multiplicative avec u unipotent et s semisimple, on a $s = 1$ et donc $gu = ug$ soit $g \in C_G(u)$.

De plus $\pi(C_G(u)^\circ) \subset C_{G'}(u')^\circ$ car π est un morphisme de groupes algébriques de $C_G(u)$ sur $C_{G'}(u')$. Mais, comme π est surjectif, par [11, proposition 2.2.14], $\pi(C_G(u)^\circ) = C_{G'}(u')^\circ$.

Ainsi on a :

$$C_G(u) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} C_{G'}(u') \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} C_{G'}(u')/C_{G'}(u')^\circ$$

où α est la surjection canonique. Notons $\psi' = \alpha \circ \pi$. Comme $C_G(u)^\circ \subset \mathrm{Ker}\psi'$, on peut passer au quotient $\psi : C_G(u)/C_G(u)^\circ \twoheadrightarrow C_{G'}(u')/C_{G'}(u')^\circ$.

Pour $g \in C_G(u)$, on notera $\overline{g}$ l'image de g par la surjection canonique $C_G(u) \twoheadrightarrow C_G(u)/C_G(u)^\circ$, ce qui est cohérent avec la notation $\overline{S}$.

Soit $g \in C_G(u)$ tel que $\overline{g} \in \mathrm{Ker}\psi$. Alors $\pi(g) = g'_0 \in C_{G'}(u')^\circ$. Mais $g'_0 = \pi(g_0)$ avec $g_0 \in C_G(u)^\circ$ donc $g = g_0 s$ avec $s \in S$ et donc $\overline{g} = \overline{g_0 s} = \overline{g_0}\ \overline{s} = \overline{s} \in \overline{S}$.

Inversement, si $\overline{s} \in \overline{S}$ alors $\psi(\overline{s}) = \psi'(s) = \alpha \circ \pi(s) = 1$ donc $\mathrm{Ker}\psi = \overline{S}$.

Ainsi $C_G(u)/C_G(u)^\circ/\overline{S} \simeq C_{G'}(u')/C_{G'}(u')^\circ$.

□

Corollaire 6.3 *Si le noyau S de π est connexe, alors $S \subset C_G(u)^\circ$ et donc $C_G(u)/C_G(u)^\circ \simeq C_{G'}(u')/C_{G'}(u')^\circ$.*

6.2.2 Réduction du problème

Proposition 6.4 *Supposons que le théorème 6.1 est vrai si G est simple de type adjoint et défini sur $\mathbb{F}_{q^r}$ pour tout $r > 0$. Alors le théorème 6.1 est vrai si G est défini sur $\mathbb{F}_q$ et a son centre qui est connexe.*

Démonstration

Soit G un groupe défini sur $\mathbb{F}_q$ de centre connexe. On montre la réduction au cas des groupes simples en trois étapes.

(a) Supposons que $G = G_1 \times G_2$ où G_1 et G_2 sont des sous groupes fermés F-stables. Alors les caractères irréductibles de G^F sont les produits tensoriels des caractères irréductibles de G_1^F et de G_2^F. Une factorisation similaire est aussi vraie pour les caractères de Gelfand-Graev généralisés. En effet, soit $u \in G^F$ un élément unipotent. Alors il existe un sous groupe parabolique F-stable $P \subset G$ et un caractère λ_u de V^F (où V est le radical de P) tel que Γ_u est obtenu en induisant λ_u de V^F à G^F. Maintenant, on a $P = P_1 \times P_2$ et $V = V_1 \times V_2$, où P_1 et P_2 sont des sous groupes paraboliques F-stables de G_1 et G_2, de radicaux unipotents V_1 et V_2 respectivement. Alors λ_u est le produit tensoriel de deux caractères irréductibles λ_1 et λ_2 de V_1^F et V_2^F respectivement. En utilisant la définition des caractères de Gelfand-Graev généralisés, on constate que si on écrit $u = u_1 u_2$ avec $u_1 \in G_1^F$ et $u_2 \in G_2^F$ alors $\mathrm{Ind}_{V_1^F}^{G_1^F}(\lambda_1)$ et $\mathrm{Ind}_{V_2^F}^{G_2^F}(\lambda_2)$ sont les caractères de Gelfand-Graev généralisés de G_1^F et G_2^F associés à u_1 et u_2, respectivement. Ainsi, Γ_u peut s'écrire comme le produit tensoriel de ces deux caractères. Ceci implique que si le théorème 6.1 est vrai pour G_1 et G_2, il est vrai pour G.

(b) Supposons que $G = G_1 \times \cdots \times G_r$ où $G_1, \ldots, G_r$ sont des sous groupes fermés et F permute cycliquement les facteurs. Alors G^F est isomorphe à $G_1^{F^r}$ et si le théorème 6.1 est vrai pour G_1, il est vrai pour G.

(c) D'après (a) et (b) et nos hypothèses, on a que le théorème 6.1 est vrai pour tout groupe semisimple de type adjoint. Soit maintenant G arbitraire de centre connexe et considérons le quotient adjoint $\pi : G \longrightarrow G_{ad}$. Comme G a un centre connexe, on a $\pi(G^F) = G_{ad}^F$. En particulier, π induit une bijection entre les classes unipotentes de G^F et celles de G_{ad}^F. Soit $u \in G^F$ un élément unipotent. Alors Γ_u est l'induit d'un caractère irréductible λ_u de V^F où V est le radical unipotent d'un sous groupe parabolique F-stable de G. Soit $\Gamma_{\pi(u)}$

le caractère de Gelfand-Graev généralisé de G_{ad}^F associé à $\pi(u)$. Notons que c'est l'induit d'un caractère linéaire de $\pi(V^F)$ dont la préimage par π est λ_u. En utilisant la réciprocité de Frobenius, il est immédiat que la multiplicité de $\pi^*(\rho)$, préimage de ρ par π, dans Γ_u est la même que la multiplicité de ρ dans $\Gamma_{\pi(u)}$, pour tout caractère irréductible ρ de G_{ad}^F. Avec cette relation, il s'en suit que si le théorème 6.1 est vrai pour G_{ad}, il est vrai pour G.

Ce qui termine la preuve.

□

6.3 Démonstration du théorème 6.1

On se propose de démontrer, dans ce paragraphe, que le théorème 6.1 est vrai. D'après la proposition 6.4, on peut supposer que G est un groupe simple de type adjoint en bonne caractéristique.

6.3.1 Support unipotent

On rappelle que, d'après [20, paragraphe 13.2.1], on peut partitionner $\mathrm{Irr}(G^F)$ en sous ensembles $\hat{G}_C$, où C décrit les classes spéciales F-stables de G^*. Ainsi

$$\mathrm{Irr}(G^F) = \coprod_C \hat{G}_C$$

Ensuite, dans [25], il est introduit le support unipotent d'un caractère ρ de $\mathrm{Irr}(G^F)$. Il s'agit de la classe unipotente O de G pour laquelle $\dim O$ est maximale et $AV(O,\rho) \neq 0$ avec

$$AV(O,\rho) = \sum_{j=1}^{r} \left[A_G(u_j) \ : \ A_G(u_j)^F\right] \rho(u_j)$$

où $u_1, \ldots, u_r \in O^F$ sont des représentants des G^F-classes contenues dans O^F.

Dans [25], il est montré l'existence du support unipotent pour p et q grands. Ces conditions ont été levées par M. Geck et G. Malle [8], [13].

Théorème 6.5 *Soit C une classe spéciale F-stable dans G^* et soit $O = \Phi_G(C)$. Alors O est le support unipotent des caractères de $\hat{G}_C$.*

Voir [25, paragraphe 10 et corollaire 10.9].

Ceci nous permet de définir n_ρ pour un caractère irréductible ρ de G^F. Si $\rho \in \hat{G}_C$ et $O = \Phi_G(C)$ est le support unipotent de ρ alors, d'après [13, théorème 3.7],

$$AV(O,\rho) = \pm n_\rho^{-1} q^d |A(u)|$$

avec $n_\rho \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $u \in O^F$ et $d = \dim \mathcal{B}_u$.

n_ρ est aussi donné dans [20, formule 4.26.3].

6.3.2 Premières étapes de démonstration

On note D_G la dualité d'Alvis-Curtis-Kawanaka sur l'anneau des caractères de G^F. C'est une involution auto-adjointe.

Rappelons maintenant le théorème B :

Théorème B *Soit O une classe unipotente de G. Alors il existe une classe spéciale et isolée C dans G^* telle que $O = \Phi_G(C)$ et telle que l'hypothèse $(*)$ soit satisfaite. En plus, si O est F-stable, alors C peut être choisie F-stable également.*

Donnons maintenant quelques propositions permettant d'introduire un certain nombre de caractères irréductibles pour chaque classe unipotente F-stable de G.

Proposition 6.6 *Soit G un groupe simple de type adjoint en bonne caractéristique. Soit O une classe unipotente F-stable de G. On suppose que $A(u)$, $u \in O$, est abélien. Soit C une classe spéciale vérifiant l'hypothèse $(*)$, F-stable comme dans le théorème B : $O = \Phi_G(C)$. Soit d le nombre de classes de conjugaison de $A(u)$. Alors il existe des caractères irréductibles $\rho_1,\ldots,\rho_d$ dans $\widehat{G}_C$ tels que la matrice des multiplicités entre les $\rho_1,\ldots,\rho_d$ et les duaux des caractères de Gelfand-Graev généralisés associés à O soit une matrice diagonale (de taille d) avec des 1 ou des -1 sur la diagonale.*

Démonstration

Dans le cas où G est muni du Frobenius standard : il s'agit de [9, proposition 6.6]. Cependant, cette proposition nécessite l'existence de $u \in O$ "split". D'après [28, remarque 5.1], cette hypothèse est vraie dans tous les cas sauf si G est de type E_8, $q \equiv -1 \mod 3$ et O est la classe paramétrée par $D_8(a_3)$, paramétrisation de [32], ce qui correspond à la paramétrisation

$E_8(b_6)$ de [3, page 432], cas pour lequel $A(u)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. On pourra aussi retrouver cela dans [7].

Dans les cas où G n'est pas muni du Frobenius standard, c'est-à-dire G^F de type ${}^2A_{n-1}$, ${}^2D_n$, ${}^3D_4$ ou ${}^2E_6$, alors on adapte la démonstration de [9, proposition 6.6]. Effectivement, ce qui change est la paire $\{.,.\}$, qui intervient dans le calcul de $n_\rho^{-1} = |\{\overline{x_\rho}, x_{\tilde{E}_1}\}|$ ([20, formule (4.26.3)], [13, paragraphe 3.B] et [9, formule 6.1 (d)]). Mais alors n_ρ est inchangé par [20, paragraphes 4.15 et 4.18] dans le cas ${}^2D_n$ et [20, paragraphe 4.19] dans tous les autres cas. Pour le cas ${}^2E_6$, on peut aussi citer [19, théorème 1.15].

□

On rappelle maintenant [9, proposition 6.7] ainsi que ce qui est évoqué dans [9, paragraphe 6.8].

Proposition 6.7 *Soit G un groupe simple de type adjoint en bonne caractéristique. Soit O une classe unipotente F-stable de G. On suppose que $A(u)$, $u \in O$, est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. Soit C une classe spéciale vérifiant l'hypothèse $(*)$, F-stable comme dans le théorème B : $O = \Phi_G(C)$. Alors la matrice des multiplicités entre les caractères irréductibles de $\widehat{G}_C$ et les duaux des caractères de Gelfand-Graev généralisés associés à O que l'on note Γ_1, Γ_2 et Γ_3 est :*

n_ρ	6	6	3	3	3	3	2	2
$D_G(\Gamma_1)$	1	1	2	.	.	.	.	.
$D_G(\Gamma_2)$	.	.	.	1	1	1	.	.
$D_G(\Gamma_3)$	.	.	.	.	.	.	1	1

Démonstration

Dans le cas où il s'agit du Frobenius standard, il s'agit de [9, proposition 6.7]. Il nous faut ici remarquer que la preuve donnée dans cet article s'applique également au cas particulier évoqué dans la démonstration de la proposition précédente où il n'existe pas d'élément “split” dans la classe unipotente O considérée.

Dans les cas où G n'est pas muni du Frobenius standard, c'est-à-dire G^F de type ${}^2E_6$, alors on adapte la démonstration de [9, proposition 6.7]. Effectivement, ce qui change est la paire $\{.,.\}$, qui intervient dans le calcul de $n_\rho^{-1} = |\{\overline{x_\rho}, x_{\tilde{E}_1}\}|$ ([20, formule (4.26.3)], [13, paragraphe 3.B] et [9, formule 6.1 (d)]). Mais alors n_ρ est inchangé par [20, paragraphe 4.19]. On peut aussi citer [19, théorème 1.15].

□

Proposition 6.8 *Soit G un groupe simple de type adjoint en bonne caractéristique. Soit O une classe unipotente F-stable de G. On suppose que $A(u)$, $u \in O$, est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ (alors nécessairement G est de type F_4). Soit C une classe spéciale vérifiant l'hypothèse (∗), F-stable comme dans le théorème B : $O = \Phi_G(C)$. Alors il existe 5 caractères irréductibles de $\widehat{G}_C$ tels que la matrice des multiplicités entre ces caractères et les duaux des 5 caractères de Gelfand-Graev généralisés associés à O est la matrice identité I_5.*

Proposition 6.9 *Soit G un groupe simple de type adjoint en bonne caractéristique. Soit O une classe unipotente F-stable de G. On suppose que $A(u)$, $u \in O$, est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ (alors nécessairement G est de type E_8). Soit C une classe spéciale vérifiant l'hypothèse (∗), F-stable comme dans le théorème B : $O = \Phi_G(C)$. Alors il existe 7 caractères irréductibles de $\widehat{G}_C$ tels que la matrice des multiplicités entre ces caractères et les duaux des 7 caractères de Gelfand-Graev généralisés associés à O est la matrice identité I_7.*

Démonstration

Les deux propositions précédentes découlent directement de [10, théorème 3.1] qui est obtenu à l'aide de [16, corollaire 3.2.7, lemme 3.3.10 et paragraphe 4.2]. Avec les notations de ce théorème, si $\{x_1, \ldots, x_d\}$ ($d = 5$ ou 7, suivant le cas) est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de $A(u) \simeq \mathcal{G}_0$, il suffit de prendre $\rho_{(x_1,1)}, \ldots, \rho_{(x_d,1)}$.

□

6.3.3 Démonstration du théorème 6.1

Soit G un groupe simple de type adjoint et q une puissance assez grande d'un nombre premier bon pour G.

Soit O une classe unipotente F-stable de G.

Les classes de conjugaison de $A(u)$ sont en bijection avec les G^F-classes de conjugaison contenues dans O^F. Effectivement, a priori ce sont les F-classes de conjugaison de $A(u)$ qui sont en bijection avec les G^F-classes de conjugaison contenues dans O^F [11, thérème 4.3.5]. Mais les F-classes de conjugaison de $A(u)$ sont en bijection avec les classes de conjugaison de $A(u)$. En effet, dans la quasi totalité des cas, comme G est simple de type adjoint, on peut choisir un représentant $u \in O^F$ tel que F agit trivialement sur $A(u)$. Effectivement, d'après [28, remarque 5.1], sauf si G est de type E_8, $q \equiv -1$ mod 3 et O est la classe paramétrée par $D_8(a_3)$, paramétrisation de [32], ce qui correspond à la paramétrisation $E_8(b_6)$ de [3, page 432], cas pour lequel $A(u)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, il existe $u \in O$ "split" et donc F agit trivialement sur $A(u)$ [28, remarque 5.1]. Dans le cas exceptionnel, $A(u) \simeq \mathfrak{S}_3$ et le nombre de F-classes de conjugaison de $A(u)$ est 3 comme le nombre de classes de conjugaison de $A(u)$, d'où le résultat.

Ainsi les classes de conjugaison de $A(u)$ sont en bijection avec les G^F-classes de conjugaison contenues dans O^F. Soient d le nombre de classes de conjugaison de $A(u)$ et $u = u_1,\ldots,u_d$ des représentants de ces G^F-classes de conjugaison

Soit C une classe spéciale vérifiant l'hypothèse $(*)$, F-stable comme dans le théorème B.

Si $A(u)$ est abélien (c'est par exemple toujours le cas si G est un groupe classique), soient $\rho_{O,1},\ldots,\rho_{O,d}$ des caractères irréductibles de G^F associés à O comme dans la proposition 6.6.

Si $A(u) \simeq \mathfrak{S}_3$ ($d = 3$ et alors nécessairement G est un groupe exceptionnel), soient $\rho_{O,1}, \ldots, \rho_{O,d}$ des caractères irréductibles de G^F associés à O comme dans la proposition 6.7 tels que la matrice 3×3 extraite du tableau de cette proposition soit l'identité.

Si $A(u) \simeq \mathfrak{S}_4$ ($d = 5$ et alors nécessairement G est un groupe exceptionnel de type F_4), soient $\rho_{O,1}, \ldots, \rho_{O,d}$ des caractères irréductibles de G^F associés à O comme dans la proposition 6.8.

Si $A(u) \simeq \mathfrak{S}_5$ ($d = 7$ et alors nécessairement G est un groupe exceptionnel de type E_8), soient $\rho_{O,1}, \ldots, \rho_{O,d}$ des caractères irréductibles de G^F associés à O comme dans la proposition 6.9.

On considère la somme de caractères de Gelfand-Graev généralisés suivante :

$$\Gamma_O = \sum_{j=1}^{d} \frac{a}{a_j} \Gamma_{u_j}$$

où $a = |A(u)|$, $a_j = |A(u_j)^F|$ et Γ_{u_j} est le caractère de Gelfand-Graev généralisé correspondant à u_j.

Soit $\rho'_{O,i}$ le caractère irréductible de G^F tel que $\rho_{O,i} = \pm D_G(\rho'_{O,i})$.

• Calculons maintenant $\langle \rho'_{O_1,i}, \Gamma_O \rangle$ où O_1 est une classe unipotente F-stable de G avec $\dim O_1 \leq \dim O$ et $O_1 \neq O$.

O_1 est le support unipotent de $\rho_{O_1,i}$, en effet, $\rho_{O_1,i} \in \hat{G}_{C_1}$ où C_1 est une classe spéciale vérifiant l'hypothèse $(*)$, F-stable comme dans le théorème

B : $O_1 = \Phi_G(O_1)$, donc, par le théorème 6.5, O_1 est le support unipotent de $\rho_{O_1,i}$.

Donc, par construction du support unipotent, voir [25, théorème 11.2] ou [8, preuve du corollaire 2.6], on a :

(**) Si O' est une classe unipotente F-stable de G telle que $\rho_{O_1,i}(g) \neq 0$ pour $g \in O'^F$ alors $\dim O' \leq \dim O_1$ avec égalité seulement si $O' = O_1$.

$\star$ Si $\dim O_1 < \dim O$, alors

$$\begin{aligned}
\langle \rho'_{O_1,i}, \Gamma_O \rangle &= \langle \pm D_G(\rho_{O_1,i}), \Gamma_O \rangle \\
&= \pm \langle \rho_{O_1,i}, D_G(\Gamma_O) \rangle \\
&= \pm \frac{1}{|G^F|} \sum_{g \in G^F} \rho_{O_1,i}(g) \overline{D_G(\Gamma_O)(g)}
\end{aligned}$$

$D_G(\Gamma_O)(g) \neq 0$ implique g unipotent et $\dim O \leq \dim(g)$ [8, paragraphe 2.3].

Si g est unipotent, $\rho_{O_1,i}(g) \neq 0$ implique $\dim(g) \leq \dim O_1$ (condition (**)).

Ainsi $\langle \rho'_{O_1,i}, \Gamma_O \rangle = 0$.

$\star$ Si $\dim O_1 = \dim O$, alors on va montrer que l'hypothèse (*) de [8, proposition 2.5] est vérifiée.

(*) $\rho_{O_1,i}(g) = 0$ pour tout $g \in G^F_{uni}$ avec $O < (g)$.

Soit $g \in G^F_{uni}$ avec $O < (g)$, ce qui signifie, dans [8], que O est contenue dans l'adhérence de (g) et $O \neq (g)$. Il faut voir $\rho_{O_1,i}(g) = 0$. Si $\rho_{O_1,i}(g) \neq 0$, par la condition (**), on a $\dim(g) \leq \dim O_1 = \dim O$, mais O étant contenue dans l'adhérence de (g), ceci implique $O = (g)$, ce qui est absurde, par hypothèse. Ainsi l'hypothèse (*) est vérifiée.

Donc d'après [8, proposition 2.5] et [13], on a :

$$\begin{aligned}
\langle \rho'_{O_1,i}, \Gamma_O \rangle &= \langle \pm D_G(\rho_{O_1,i}), \Gamma_O \rangle \\
&= \pm \langle \rho_{O_1,i}, D_G(\Gamma_O) \rangle \\
&= \pm \frac{1}{q^d} AV(O, \rho_{O_1,i}) = 0
\end{aligned}$$

car O_1 est l'unique classe unipotente de dimension maximale telle que $AV(O_1, \rho_{O_1,i}) \neq 0$, c'est la définition du support unipotent.

Ainsi, en ordonnant les classes unipotentes par dimension, on obtient une matrice triangulaire inférieure par bloc, chaque bloc diagonal correspondant à une classe de conjugaison O et à ses caractères $\rho'_{O,i}$.

• Calculons maintenant $\langle \rho'_{O,i}, \Gamma_O \rangle$, ce qui revient à déterminer le bloc diagonal correspondant à la classe O.

Si $A(u)$ n'est pas abélien, le bloc correspondant à O est l'identité par le choix fait au début de la démonstration et les propositions 6.7, 6.8 et 6.9.

Supposons donc $A(u)$ est abélien. Par le choix fait au début de la démonstration et la proposition 6.6, le bloc correspondant à O est l'identité.

Cependant notons tout de même que, par [9, preuve de la proposition 6.6], $n_{\rho_{O,i}} = |\mathcal{G}_{\mathcal{F}}| = |A(u)|$, car l'hypothèse $(*)$ est vérifiée par la classe spéciale C.

D'après [13, démonstration de la proposition 3.5 ou théorème 3.7], on a :

$$\begin{aligned}
\langle \rho'_{O,i}, \Gamma_O \rangle &= \langle \pm D_G(\rho_{O,i}), \Gamma_O \rangle \\
&= \pm \langle \rho_{O,i}, D_G(\Gamma_O) \rangle \\
&= \pm \frac{1}{q^d} AV(O, \rho_{O,i}) \\
&= n_{\rho_{O,i}}^{-1} |A(u)| = 1
\end{aligned}$$

Donc $\rho'_{O,i}$ apparaît avec multiplicité 1 dans un et un seul des Γ_{u_j} pour u_1,..., u_d représentants des G^F-classes de conjugaison contenues dans O^F. Ce qui nous montre à nouveau que, à permutation près, le bloc correspondant à O est l'identité mais aussi que, dans le cas $A(u)$ abélien, alors $a_j = a$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$ donc F agit trivialement sur $A(u_j)$.

Ceci démontre que le théorème 6.1 est vrai.

6.4 Conséquences du théorème 6.1

On garde le cadre précédent et on se propose de démontrer quelques conséquences du théorème 6.1.

Tout d'abord, introduisons quelques notations. On note (g) la G-classe de conjugaison de $g \in G$. Si O et O' sont deux classes unipotentes de G, on note $O \leq O'$ si $\dim O < \dim O'$ ou $O = O'$. Ceci définit un ordre partiel sur l'ensemble des classes unipotentes de G.

Une fonction de classe f sur G^F sera dite à support unipotent si $f(g) = 0$ pour tout $g \in G^F$ qui n'est pas unipotent. On note toujours D_G la dualité d'Alvis-Curtis-Kawanaka sur l'anneau des caractères de G^F. C'est une involution auto-adjointe qui envoie une fonction de classe à support unipotent sur une autre fonction de classe à support unipotent.

Définition 6.10 Soit f une fonction de classe sur G^F à support unipotent et O une classe unipotente F-stable de G. On dit que f est à support dans O si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(a) si $f(g) \neq 0$ pour $g \in G^F$ alors $(g) \leq O$.

(b) si $D_G(f)(g) \neq 0$ pour $g \in G^F$ alors $O \leq (g)$.

Soient $u_1, \ldots, u_n$ des représentants des classes unipotentes de G^F. On note $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ les caractères de Gelfand-Graev généralisés correspondants.

Supposons que p et q soient suffisamment grands pour que les résultats de [25] s'appliquent, plus précisément, supposons que p et q soient suffisamment grands pour que les trois hypothèses suivantes soient réalisées :

(H1) Les caractères $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ forment une $\mathbb{C}$-base de l'espace des fonctions de classes de G^F à support unipotent.

(H2) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le caractère Γ_i est à support dans (u_i).

(H3) Le théorème 6.1 est satisfait.

Théorème C (conjecture de Kawanaka [17]) *Supposons que les hypothèses précédentes soient satisfaites. Alors tout caractère virtuel à support unipotent de G^F est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de caractères de Gelfand-Graev généralisés.*

Remarque 6.11 Dans [15], N. Kawanaka démontre ce résultat pour le cas des groupes linéaires et unitaires sans restriction sur p et q.

Démonstration

Soit f un caractère virtuel à support unipotent de G^F. Par (H1), on peut écrire

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_j \quad \text{avec } a_j \in \mathbb{C}$$

Considérons maintenant les produits scalaires de f avec les caractères ρ_i donnés par l'hypothèse (H3). Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on obtient $\sum_j \overline{a_j}\langle \rho_i, \Gamma_j\rangle = \langle \rho_i, f\rangle \in \mathbb{Z}$. Comme la matrice des produits scalaires $(\langle \rho_i, \Gamma_j\rangle)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$, on peut inverser, dans $\mathbb{Z}$, les équations précédentes et on en déduit que $a_j \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.
□

Lemme 6.12 *Supposons que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) soient réalisées. Soit f une fonction de classes à support unipotent sur G^F et O une classe unipotente F-stable de G.*

(a) Si $f(g) = 0$ pour tout $g \in G^F$ à moins que $(g) \leq O$, alors f est une combinaison linéaire de caractères de Gelfand-Graev généralisés Γ_j où $(u_j) \leq O$.

(b) Si $f(g) = 0$ pour tout $g \in G^F$ à moins que $O \leq (g)$, alors f est une combinaison linéaire de caractères $D_G(\Gamma_j)$ où les Γ_j sont des caractères de Gelfand-Graev généralisés avec $O \leq (u_j)$.

Démonstration

Prouvons tout d'abord le (a). Par (H1), on peut écrire de façon unique $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j\Gamma_j$ avec $a_1,\ldots,\ a_n \in \mathbb{C}$. Réécrivons cela sous forme matricielle : $\Gamma = (\Gamma_i(u_j))_{1\leq i,j\leq n}$, la matrice des valeurs des caractères de Gelfand-Graev généralisés, $\mathbf{f} = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ le vecteur ligne des valeurs de f, et $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. On a alors $\mathbf{a}\Gamma = \mathbf{f}$.

Maintenant définissons une relation d'équivalence $\sim$ sur l'ensemble des indices $\{1, \ldots, n\}$ par la condition $i \sim j$ si et seulement si $(u_i) = (u_j)$. Par l'hypothèse (H2) et la condition (a) de la définition 6.10, la matrice Γ est triangulaire inférieure par blocs et les blocs sont donnés par les classes d'équivalence de $\sim$. La matrice entière est inversible donc chaque bloc diagonal l'est. De plus, Γ^{-1} est aussi triangulaire inférieure par blocs. Comme $\mathbf{a} = \mathbf{f}\Gamma^{-1}$, l'hypothèse sur f implique que $a_j = 0$ à moins que $(u_j) \leq O$.

La preuve de (b) est complètement similaire, en considérant la matrice $(D_G(\Gamma_i)(u_j))_{1\leq i,j\leq n}$. Notons que, comme D_G est une involution auto-adjointe sur l'anneau des caractères de G^F et qui envoie une fonction de classe à support unipotent sur une autre telle fonction, (H1) implique que la matrice $(D_G(\Gamma_i)(u_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est aussi inversible. De plus, elle a une forme triangulaire supérieure par blocs par l'hypothèse (H2) et la condition (b) de la définition 6.10.

□

On peut maintenant établir une caractérisation des caractères de Gelfand-Graev généralisés. Etant donnés χ et ψ deux caractères de G^F, on écrit $\psi < \chi$ si $\chi - \psi$ est un caractère de G^F (et pas simplement un caractère virtuel). Avec cette notation, on peut énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 6.13 (caractérisation des caractères de Gelfand-Graev généralisés) *Supposons que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) soient réalisées. Soient O une classe unipotente F-stable de G et χ un caractère de G^F à support unipotent. Alors $\chi = \Gamma_i$ pour un i avec $O = (u_i)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) Le caractère χ a son support dans O, voir la définition 6.10.

(b) Aucun caractère ψ avec $\psi < \chi$ a son support dans O.

La condition (b) peut être remplacée par la condition :
(b') Le degré de χ est $|G^F|q^{-\dim O/2}$.

Démonstration

Par (H2), on sait que (a) est vrai pour les caractères de Gelfand-Graev généralisés. Inversement, soit χ un caractère satisfaisant la condition (a), c'est-à-dire, χ est à support dans O. On va montrer que χ est une somme de caractères de Gelfand-Graev généralisés Γ_i où $O = (u_i)$. Tout d'abord, (a) implique que χ est à support unipotent. Par le théorème C, on peut écrire de façon unique :

$$\chi = \sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_j \quad \text{où } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$$

Appliquant le lemme 6.12 (a) à χ, on a $a_j = 0$ à moins que $(u_j) \leq O$. Appliquons D_G à l'équation ci-dessus, on obtient $D_G(\chi) = \sum_{j=1}^{n} a_j D_G(\Gamma_j)$. Par le lemme 6.12 (b), on a $a_j = 0$ à moins que $O \leq (u_j)$. Ainsi, en posant $J \subset \{1, \ldots, n\}$ le sous ensemble des j tels que $O = (u_j)$, on a :

$$\chi = \sum_{j \in J} a_j \Gamma_j$$

Maintenant, considérons les caractères ρ_i de l'hypothèse (H3). On a $\langle \rho_i, \Gamma_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout i et j dans J. On en déduit :

$$0 \leq \langle \rho_i, \chi \rangle = \sum_{j \in J} a_j \langle \rho_i, \Gamma_j \rangle = a_i \quad \text{pour } i \in J$$

Cela montre effectivement que χ est une somme de caractères de Gelfand-Graev généralisés Γ_j avec $j \in J$.

Par conséquent, si χ satisfait aussi la condition (b), alors $\chi = \Gamma_j$ pour un $j \in J$, car tous les caractères de Gelfand-Graev généralisés associés à un élément de O sont à support dans O d'après (H2).

Pour compléter la preuve, il reste à voir qu'un caractère de Gelfand-Graev généralisé Γ_j ($j \in J$) vérifie la condition (b). Soit donc χ un caractère à support dans O et supposons, si possible, que $\chi < \Gamma_j$. Alors on peut appliquer l'argument ci-dessus à χ et conclure que χ est une somme de caractères de Gelfand-Graev généralisés $\Gamma_{j'}$ avec $j' \in J$. Mais ces derniers ont tous le même degré $|G^F|q^{-\dim O/2}$ et en conséquent, on en déduit $\chi(1) \geq \Gamma_j(1)$. D'un autre côté, la relation $\chi < \Gamma_j$ implique $\chi(1) < \Gamma_j(1)$, d'où une contradiction. Ce qui termine la preuve.

Par un argument similaire de degré, on montre que la condition (b) peut être remplacée par la condition (b').

$\square$

Annexe A

Deux résultats combinatoires

Nous allons montrer, dans cette annexe, deux résultats combinatoires sur le d-invariant.

A.1 Un premier résultat

On définit, si Λ est un symbole appartenant à $X_{n,e}^{r,s}$ (voir le paragraphe 1.4),

$$d(\Lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\{c,c'\}} \min(c,c') - r\frac{m(m-1)(4m+1)}{6} \\ \qquad\qquad -s\dfrac{m(m+1)(4m-1)}{6} & \text{si } e = 1 \\ \displaystyle\sum_{\{c,c'\}} \min(c,c') - r\frac{m(m-1)(4m-5)}{6} \\ \qquad\qquad -s\dfrac{m(m+1)(4m+1)}{6} & \text{si } e = 0 \end{cases}$$

où $\{c,c'\}$ décrit tous les ensembles à deux éléments de la suite des entrées d'un représentant de Λ et m est la longueur de la deuxième ligne de ce représentant.

Notons que d est bien défini car il ne dépend pas du représentant de Λ choisi.

Par ailleurs, avec les notations et les résultats du chapitre 1, d est égal à d_B, d_C ou d_D suivant les cas.

Définition A.1 Soient $A = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k)$ et $B = (b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l)$ deux suites de naturels.

On pose

$$G(A, B) = \sum_{(a,b) \in A \times B} \min(a, b)$$

$$H(A, B) = \sum_{\{c,c'\}} \min(c, c')$$

où $\{c, c'\}$ décrit tous les ensembles à deux éléments de la suite des entrées $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$.

Proposition A.2 *Soient* $A = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k)$ *et* $B = (b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l)$.

Soit $A' = (a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_k)$ *avec*

$$\sum_{i=j}^{k} a'_i \leq \sum_{i=j}^{k} a_i \textit{ pour } 1 \leq j \leq k \textit{ et } \sum_{i=1}^{k} a'_i = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Alors $G(A, B) \leq G(A', B)$.

Démonstration

On utilise une méthode analogue à celle évoquée dans [1].

Il suffit de le faire dans le cas $A' = (a_1 \leq \cdots \leq a_{i-1} \leq a_i + 1 \leq a_{i+1} \leq \cdots \leq a_{j-1} \leq a_j - 1 \leq a_{j+1} \leq \cdots \leq a_k)$, en effet, on peut trouver un chemin de ce type entre A et A' si A et A' vérifient les conditions de l'énoncé.

Il existe un unique $i_0 \in \{1, \ldots, l\}$ (respectivement un unique $j_0 \in \{1, \ldots, l\}$) tel que $i_0 < l$ et $b_{i_0} \leq a_i < b_{i_0+1}$ ou $i_0 = l$ et $b_{i_0} \leq a_i$ (respectivement tel que $j_0 < l$ et $b_{j_0} < a_j \leq b_{j_0+1}$ ou $j_0 = l$ et $b_{j_0} < a_j$).

On a alors, si $i_0 < l$, $b_{i_0} < a_i + 1 \leq b_{i_0+1}$ et si $i_0 = l$, $b_{i_0} < a_i + 1$ (respectivement, si $j_0 < l$, $b_{j_0} \leq a_j - 1 < b_{j_0+1}$ et si $j_0 = l$ et $b_{j_0} \leq a_j - 1$).

On en déduit :

$$\begin{aligned}
G(A,B) &= \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\min(a_r,b_s) \\
&= \sum_{\substack{r=1\\ r\neq i,j}}^{k}\sum_{s=1}^{l}\min(a_r,b_s) + \sum_{s=1}^{l}\min(a_i,b_s) + \sum_{s=1}^{l}\min(a_j,b_s) \\
&= \sum_{\substack{r=1\\ r\neq i,j}}^{k}\sum_{s=1}^{l}\min(a_r,b_s) + (l-i_0)a_i + \sum_{s=1}^{i_0} b_s + (l-j_0)a_j + \sum_{s=1}^{j_0} b_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(A',B) &= \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\min(a'_r,b_s) \\
&= \sum_{\substack{r=1\\ r\neq i,j}}^{k}\sum_{s=1}^{l}\min(a_r,b_s) + \sum_{s=1}^{l}\min(a_i+1,b_s) + \sum_{s=1}^{l}\min(a_j-1,b_s) \\
&= \sum_{\substack{r=1\\ r\neq i,j}}^{k}\sum_{s=1}^{l}\min(a_r,b_s) + (l-i_0)(a_i+1) + \sum_{s=1}^{i_0} b_s + (l-j_0)(a_j-1) + \sum_{s=1}^{j_0} b_s \\
&= G(A,B) + j_0 - i_0 \geq G(A,B)
\end{aligned}$$

□

Corollaire A.3 *Soient* $A = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k)$ *et* $B = (b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l)$.

Soit $B' = (b'_1 \leq b'_2 \leq \cdots \leq b'_l)$ *avec*

$$\sum_{i=j}^{k} b'_i \leq \sum_{i=j}^{k} b_i \ \textit{pour}\ 1 \leq j \leq k \ \textit{et}\ \sum_{i=1}^{k} b'_i = \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Alors $G(A,B) \leq G(A,B')$.

Démonstration
C'est la démonstration précédente en remarquant que $G(A,B) = G(B,A)$.
□

Corollaire A.4 *Soient* $A = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k)$ *et* $B = (b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l)$.

Soit $A' = (a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_k)$ *avec*

$$\sum_{i=j}^{k} a'_i \leq \sum_{i=j}^{k} a_i \text{ pour } 1 \leq j \leq k \text{ et } \sum_{i=1}^{k} a'_i = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Soit $B' = (b'_1 \leq b'_2 \leq \cdots \leq b'_l)$ *avec*

$$\sum_{i=j}^{k} b'_i \leq \sum_{i=j}^{k} b_i \text{ pour } 1 \leq j \leq k \text{ et } \sum_{i=1}^{k} b'_i = \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Alors $H(A,B) \leq H(A',B')$ *avec égalité si et seulement si* $A' = A$ *et* $B' = B$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
&H(A',B') - H(A,B) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(k-i)a'_i + \sum_{j=1}^{l}(l-j)b'_j + G(A',B') \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k}(k-i)a_i - \sum_{j=1}^{l}(l-j)b_j - G(A,B) \\
&= k\left(\sum_{i=1}^{k} a'_i - \sum_{i=1}^{k} a_i\right) + l\left(\sum_{j=1}^{l} b'_j - \sum_{j=1}^{l} b_j\right) + G(A',B') - G(A,B) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i}^{k} a'_j - \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=j}^{l} b'_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i}^{k} a_j + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=j}^{l} b_i \\
&= G(A',B') - G(A,B) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i}^{k}(a_j - a'_j) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=j}^{l}(b_j - b'_j) \\
&= \mathcal{E}
\end{aligned}$$

Donc, avec les hypothèses sur A et A' et sur B et B', on a $\mathcal{E} \geq G(A',B') -$

$G(A, B)$ avec égalité si et seulement si $A' = A$ et $B' = B$.

Enfin $G(A', B') - G(A, B) = G(A', B') - G(A', B) + G(A', B) - G(A, B) \geq 0$ par la proposition A.2 et le corollaire A.3, avec égalité si $A' = A$ et $B' = B$.
□

Rappelons la définition 1.10.

Définition 1.10 *Soient Λ et Λ' deux éléments de $X_{n,e}^{r,s}$. Soient (A, B) et (A', B') des représentants respectifs de Λ et Λ' avec B et B' de même longueur m.*

On note $A = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{m+e})$, $A' = (a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_{m+e})$, $B = (b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_m)$ et $B' = (b'_1 \leq b'_2 \leq \cdots \leq b'_m)$

On dit que $\Lambda' \prec \Lambda$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- *pour tout $j \in \{1, \ldots, m+e\}$, $\displaystyle\sum_{i=j}^{m+e} a'_i \leq \sum_{i=j}^{m+e} a_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m+e} a'_i = \sum_{i=1}^{m+e} a_i$.*
- *pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\displaystyle\sum_{i=j}^{m} b'_i \leq \sum_{i=j}^{m} b_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} b'_i = \sum_{i=1}^{m} b_i$.*

Corollaire A.5 *Soient Λ et Λ' deux éléments de $X_{n,e}^{r,s}$ avec $\Lambda' \prec \Lambda$. Alors $d(\Lambda) \leq d(\Lambda')$ avec égalité si et seulement si $\Lambda = \Lambda'$.*

A.2 Un second résultat

Soient $A = ((a_1, \ldots, a_{m+1}), (b_1, \ldots, b_m))$, $B = ((c_1, \ldots, c_{m+1}), (d_1, \ldots, d_m))$ et $C = ((x_1, \ldots, x_{m+1}), (y_1, \ldots, y_m))$

On suppose que $a_i \leq b_i \leq a_{i+1}$, $c_i \leq d_i \leq c_{i+1}$ pour $i \in \{1, \ldots, m\}$, on dira alors que A et B sont distingués. On suppose également que $a_i < a_{i+1}$, $b_i < b_{i+1}$, $c_i < c_{i+1}$, $d_i < d_{i+1}$

On suppose $x_i = a_i + c_i$ et $y_i = b_i + d_i$, ce que l'on peut résumer par $A + B = C$. Alors C est distingué.

Posons $A' = A + ((0, 2, 4, \ldots, 2m), (1, 3, \ldots, 2m-1))$,
$B' = B + ((0, 2, 4, \ldots, 2m), (1, 3, \ldots, 2m-1))$,
$C' = C + ((0, 4, 8, \ldots, 4m), (2, 6, \ldots, 4m-2))$.
On a alors $C' = A' + B'$.

Alors A', B' et C' vérifient les mêmes hypothèses que A, B et C. Par ailleurs, les entrées de A' et B' sont toutes deux à deux distinctes.

Posons $A_1 = A'$, $B_1 = B'$ et $C_1 = C'$.

Pour i valant 2 jusqu'à $2m+1$, on définit par récurrence :

• Si $i = 2k+1$ est impair, $A_i = A_{i-1}$ dans lequel on remplace le k-ème terme de la première ligne qui vaut $a_k + 2(k-1)$ par a_k, $B_i = B_{i-1}$ dans lequel on remplace le k-ème terme de la première ligne qui vaut $c_k + 2(k-1)$ par c_k et $C_i = C_{i-1}$ dans lequel on remplace le k-ème terme de la première ligne qui vaut $x_k + 4(k-1)$ par x_k. Alors A_i, B_i et C_i vérifient les mêmes hypothèses que A, B et C.

• Si $i = 2k$ est pair, $A_i = A_{i-1}$ dans lequel on remplace le k-ème terme de la deuxième ligne qui vaut $b_k + 2k - 1$ par b_k, $B_i = B_{i-1}$ dans lequel on remplace le k-ème terme de la première ligne qui vaut $d_k + 2k - 1$ par d_k et $C_i = C_{i-1}$ dans lequel on remplace le k-ème terme de la première ligne qui vaut $y_k + 4k - 2$ par y_k. Alors A_i, B_i et C_i vérifient les mêmes hypothèses que A, B et C.

On a $A_{2m+1} = A$, $B_{2m+1} = B$ et $C_{2m+1} = C$

Ainsi, si A, B et C sont tels que $A + B = C$, il existe A', B' et C' vérifiant $A' + B' = C'$ dont toutes les entrées sont distinctes et un chemin dont les étapes sont élémentaires (dans le sens où une seule entrée dans chaque symbole est modifiée) menant de A', B' et C' à A, B et C en préservant, à chaque étape, la propriété sur la somme et la propriété d'être distingué.

Exemple A.6 Si $A = ((1,2,5,9),(1,3,5))$, $B = ((1,3,5,6),(3,5,6))$ et $C = ((2,5,10,15),(4,8,11))$.

Alors, on a :

	A_i	B_i	C_i
$i=1$	((1,4,9,15),(2,6,10))	((1,5,9,12),(4,8,11))	((2,9,18,27),(6,14,21))
$i=2$	((1,4,9,15),(1,6,10))	((1,5,9,12),(3,8,11))	((2,9,18,27),(4,14,21))
$i=3$	((1,2,9,15),(1,6,10))	((1,3,9,12),(3,8,11))	((2,5,18,27),(4,14,21))
$i=4$	((1,2,9,15),(1,3,10))	((1,3,9,12),(3,5,11))	((2,5,18,27),(4,8,21))
$i=5$	((1,2,5,15),(1,3,10))	((1,3,5,12),(3,5,11))	((2,5,10,27),(4,8,21))
$i=6$	((1,2,5,15),(1,3,5))	((1,3,5,12),(3,5,6))	((2,5,10,27),(4,8,11))
$i=7$	((1,2,5,9),(1,3,5))	((1,3,5,6),(3,5,6))	((2,5,10,15),(4,8,11))

Un raisonnement complètement similaire peut être fait si
$A = ((a_1,\ldots,a_m),(b_1,\ldots,b_m))$,
$B = ((c_1,\ldots,c_m),(d_1,\ldots,d_m))$,
$C = ((x_1,\ldots,x_m),(y_1,\ldots,y_m))$.

Annexe B

Rappels sur les caractères de Gelfand-Graev généralisés

Nous allons rappeler brièvement ici la construction des caractères de Gelfand-Graev généralisés ; pour cela voir [10].

Soit G un groupe réductif connexe défini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, avec le Frobenius correspondant $F : G \longrightarrow G$. On note k la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et on suppose que la caractéristique p est bonne pour G, c'est-à-dire qu'elle est bonne pour tous les facteurs simples de G, ce qui se résume par :

$$\begin{aligned} A_n &: \text{ pas de condition,} \\ B_n,\ C_n,\ D_n &: \ p \neq 2, \\ G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7 &: \ p \neq 2, 3, \\ E_8 &: \ p \neq 2, 3, 5. \end{aligned}$$

On fixe un sous groupe de Borel F-stable B de G et on écrit $B = U.T$ où U est le radical unipotent de B et T un tore maximal F-stable. Soient X =Hom$(T, k^\times)$ et $\Phi \subset X$ le système de racines de G par rapport à T. Alors B détermine un système de racines positives $\Phi^+ \subset \Phi$ et un ensemble de racines simples correspondant $\Delta \subset \Phi^+$. On a

$$G = \langle T, X_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle \quad \text{et} \quad U = \prod_{\alpha \in \Phi^+} X_\alpha$$

où X_α est le sous groupe racine correspondant à $\alpha \in \Phi$, le produit étant pris selon un ordre fixé sur les racines.

Pour tout $\alpha \in \Phi$, il y a un isomorphisme de groupes algébriques $x_\alpha : k^+ \longrightarrow X_\alpha$ tel que, pour tout $t \in T$ et $\xi \in k$, $tx_\alpha(\xi)t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)\xi)$.

A chaque classe unipotente de G, on peut associer un diagramme de Dynkin pondéré, c'est-à-dire une application additive $d : \Phi \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que $d(\alpha) \in \{0, 1, 2\}$ pour tout $\alpha \in \Delta$.

Cette application de l'ensemble des classes unipotentes dans l'ensemble des applications additives vérifiant la condition ci-dessus est injective mais non surjective en général. La liste complète des diagrammes de Dynkin pondérés pour les différents types de groupes algébriques simples se trouve dans [3, paragraphe 13.1]. Etant donné un tel diagramme de Dynkin pondéré d, la classe unipotente correspondante est déterminée comme suit. On pose

$$L_d = \langle T, X_\alpha \mid \alpha \in \Phi,\ d(\alpha) = 0 \rangle \quad \text{et} \quad U_{d,i} = \prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ d(\alpha) \geq i}} X_\alpha$$

pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ Alors $P_d = U_{d,1}.L_d$ est un sous groupe parabolique de G, de radical unipotent $U_{d,1}$ et de sous groupe de Levi L_d. Par [16, théorème 2.1.1], il existe une unique classe unipotente C dans G telle que $C \cap U_{d,2}$ est dense dans $U_{d,2}$. De plus, $C \cap U_{d,2}$ est une unique P_d-classe de conjugaison et l'on a $C_G(u) \subset P_d$ pour tout $u \in C \cap U_{d,2}$. Alors C est la classe unipotente associée au diagramme de Dynkin pondéré d.

Pour définir le caractère de Gelfand-Graev généralisé associé à un élément $u \in C \cap U_{d,2}^F$, on a besoin de travailler dans le cadre des algèbres de Lie. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G sur k. $\mathfrak{g}$ est aussi définie sur $\mathbb{F}_q$ et l'on a le Frobenius correspondant $F : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de T. On a la décomposition de Cartan :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} k e_\alpha \quad \text{où } F(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t} \text{ et } F(e_\alpha) = e_\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \Phi.$$

On pose $c_\alpha = \kappa(e_\alpha^*, e_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ où $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow k$ est une forme bilinéaire associative, non dégénérée, G-invariante (forme de Killing) et $x \longmapsto x^*$ un anti-$\mathbb{F}_q$-automorphisme de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{t}$ et $e_\alpha^* \in \mathbb{F}_q e_{-\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Phi$ [16, paragraphe 3.1].

Finalement, on fixe un homomorphisme non trivial $\chi : \mathbb{F}_q^+ \longrightarrow \mathbb{C}^\times$.

Définition B.1 Considérons un élément unipotent $u \in C \cap U_{d,2}^F$ et écrivons

$$u \in \left(\prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ d(\alpha)=2}} x_\alpha(\eta_\alpha) \right) .U_{d,3}^F \quad \text{où } \eta_\alpha \in \mathbb{F}_q$$

Avec cette notation, on définit $\varphi_u : U_{d,2}^F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ par

$$\varphi_u \left(\prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ d(\alpha)\geq 2}} x_\alpha(\xi_\alpha) \right) = \chi \left(\sum_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ d(\alpha)=2}} c_\alpha \eta_\alpha \xi_\alpha \right) \quad \text{où } \xi_\alpha \in \mathbb{F}_q.$$

L'application φ_u est en fait un homomorphisme de groupes, c'est-à-dire un caractère linéaire de $U_{d,2}^F$. Induisant ce caractère de $U_{d,2}^F$ à G^F, on obtient :

$$\mathrm{Ind}_{U_{d,2}^F}^{G^F} (\varphi_u) = \left[U_{d,1}^F : U_{d,2}^F \right]^{1/2} .\Gamma_u$$

où Γ_u est le caractère de Gelfand-Graev généralisé associé à u.

Remarque B.2 Notons que $\left[U_{d,1}^F : U_{d,2}^F \right]$ est une puissance paire de q, donc sa racine carrée existe.

Par ailleurs, cette construction ne dépend pas du choix de u dans la P_d^F-classe de conjugaison.

Enfin, si C est la G-classe de conjugaison de u. Alors C^F se scinde en G^F-orbites et ces G^F-orbites sont paramétrées par les F-classes de conjugaison de $C_G(u)/C_G(u)^\circ$. Comme $C_G(u) \subset P_d$, un ensemble de représentants de toutes les G^F-orbites contenues dans C^F peut être trouvé dans $C \cap U_{d,2}^F$.

Bibliographie

[1] A. M. Aubert, 'Character sheaves and generalized Springer correspondence', *Nagoya Mathematical Journal* 170 (2003), 47-72.

[2] R. W. Carter, 'Centralizers of Semisimple Elements in the Finite Classical Groups', *Proceedings of the London Mathematical Society* 42 (3) (1981).

[3] R. W. Carter, *Finite groups of Lie type : conjugacy classes and complex characters* (Wiley, New-York, 1985).

[4] D. I. Deriziotis, 'The Centralizers of Semisimple Elements of the Chevalley Groups E_7 and E_8', *Tokyo Journal of Mathematics* 6 (1983), 191-216.

[5] D. I. Deriziotis, *Conjugacy Classes and Centralizers of Semisimple Elements in Finite Groups of Lie Type*, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen, Heft 11 (1984).

[6] F. Digne, J. Michel, *Representations of finite groups of Lie type* (London Mathematical Society Student Texts 21, 1991).

[7] M. Geck, 'Basic sets of Brauer characters of finite groups of Lie type, III', *Manuscripta Mathematica* 85 (1994), 195-216.

[8] M. Geck, 'On the average values of the irreducible characters of finite groups of Lie type on geometric unipotent classes', *Documenta Mathematica* 1 (1996), 293-317.

[9] M. Geck, 'Characters sheaves and Generalized Gelfand-Graev characters', *Proceedings of the London Mathematical Society* 78 (3) (1997), 139-166.

[10] M. Geck, 'On the Schur indices of cuspidal unipotent characters', preprint (2003), disponible sur `http://arXiv.org/math.RT/0306267`.

[11] M. Geck, *An introduction to algebraic geometry and algebraic groups* (Oxford Graduate Texts in Mathematics 10, 2003).

[12] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle et G. Pfeiffer, CHEVIE- A system for computing and processing generic character tables, Computational methods in Lie theory, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **7** (1996), 175-210 ; disponible électroniquement à `http://www.math.rwth-aachen.de/~CHEVIE`.

[13] M. Geck, G. Malle, 'On the existence of a unipotent support for the irreducible characters of the finite group of Lie type', *Transactions of the American Mathematical Society* 352 (1) (1999), 429-456.

[14] M. Geck, G. Pfeiffer, *Characters of finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke algebras* (London Mathematical Society Monographs, New Series 21, 2000).

[15] N. Kawanaka, 'Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality', *Advanced Studies in Pure Mathematics* 6 (1985), 175-206.

[16] N. Kawanaka, 'Generalized Gelfand-Graev representations of exceptional algebraic groups', *Inventiones Mathematicae* 84 (1986), 575-616.

[17] N. Kawanaka, 'Shintani lifting and Gelfand-Graev representations', *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society* 47 (1987), 147-163.

[18] G. Lusztig, 'A class of irreducible representations of a Weyl group', *Proceedings of Koninklijke Nederlandse Akademie* 82 (1979), 323-335.

[19] G. Lusztig, 'On the Unipotent Characters of the Exceptional Groups Over Finite Fields', *Inventiones Mathematicae* 60 (1980), 173-192.

[20] G. Lusztig, *Characters of reductive groups over a finite field* (Annals of Mathematical Studies, volume 107, 1984).

[21] G. Lusztig, 'Intersection cohomology complexes on a reductive group', *Inventiones Mathematicae* 75 (1984), 205-272.

[22] G. Lusztig, 'Character sheaves', *Advances in Mathematics* 56, 193-237, 57, 226-265, 57, 266-315, 59, 1-63, 61, 103-155 (1985-1986).

[23] G. Lusztig, 'On the Character Values of Finite Chevalley Groups at Unipotent Elements', *Journal of Algebra* 104 (1986), 146-194.

[24] G. Lusztig, 'On the representations of reductive groups with disconnected centre', *Orbites unipotentes et représentations*, *Astérisque* 168 (1988), 157-166.

[25] G. Lusztig, 'A unipotent support for irreducible representations', *Advances in Mathematics* 94 (1992), 139-179.

[26] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials, second edition* (Oxford University Press, 1995).

[27] T. Shoji, 'On the Green polynomials of classical groups', *Inventiones Mathematicae* 74 (1983), 239-267.

[28] T. Shoji, 'Green Functions of Reductive Groups over a Finite Field', *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society* 47 (1987), 289-301.

[29] T. Shoji, 'Shintani descent for exceptional groups over a finite field', *Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo, Section IA, Mathematics* 34 (1987), 599-653.

[30] T. Shoji, 'Character sheaves and almost characters of reductive groups I', *Advances in Mathematics* 111 (1995), 244-313.

[31] T. Shoji, 'Character sheaves and almost characters of reductive groups II', *Advances in Mathematics* 111 (1995), 314-354.

[32] N. Spaltenstein, *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel* (Lecture Notes in Mathematics, volume 946, 1982).

[33] N. Spaltenstein, 'On the Generalized Springer Correspondence for Exceptional Groups', *Advanced Studies in Pure Mathematics* 6 (1985), 317-338.

Index des notations

TITRE en Anglais

On the character sheaves unipotent support

RÉSUMÉ en Anglais

Let G be a connected reductive algebraic group with connected centre over a finite field of characteristic $p > 0$. We put on this structure a Frobenius map F and we note G^F the set of the elements of G which are fixed by the action of F : G^F is a finite group. We suppose that the characteristic p is good for G.

Then, we define an application Φ_G from the set of the special conjugaison classes of G^* to the set of the unipotent classes of G. This application describes the unipotent support of the different classes of character sheaves defined on G.

On the other hand, with the Springer correspondence, we define some invariants, for example the d-invariants, for the characters of a Weyl group W. We have studied the link between the induction of special characters of certain subgroups of W and the d-invariants. With these results, we show that Φ_G, restricted to certain special classes of G^* is surjective. We have also showed that the Frobenius stability can be introduced in this result.

We deduced from that two results. The first one is a strong link between the restrictions to the unipotent elements of character sheaves of certain classes and different local irreducible G-equivariant systems on the unipotent classes of G.

The second result is a proof of a Kawanaka conjecture on the generalized Gelfand-Graev characters : they constitute a base of the $\mathbb{Z}$-module of the virtual characters of G^F with unipotent support.

DISCIPLINE Mathématiques Pures

RÉSUMÉ en Français

Soit G un groupe algébrique réductif connexe de centre connexe défini sur un corps fini de caractéristique $p > 0$. On munit cette structure d'un endomorphisme de Frobenius F et on note G^F l'ensemble des points de G fixes pour l'action de F : G^F est un groupe fini. On suppose que la caractéristique p est bonne pour G.

On définit alors une application Φ_G de l'ensemble des classes de conjugaison spéciales de G^* dans l'ensemble des classes unipotentes de G. Cette application décrit le support unipotent des différentes classes de faisceaux-caractères définis sur G.

Parallèlement à cela, via la correspondance de Springer, on définit différents invariants, dont les d-invariants, pour les caractères d'un groupe de Weyl W. Nous avons étudié le lien entre l'induction de caractères spéciaux de certains sous groupes de W et les d-invariants. A l'aide de ceci, on démontre que Φ_G, restreinte à certaines classes spéciales particulières de G^* est surjective. On a montré que la stabilité vis-à-vis du Frobenius pouvait être introduite dans ce résultat.

On en déduit deux résultats. Le premier est un lien étroit entre les restrictions aux éléments unipotents de faisceaux-caractères de certaines classes et différents systèmes locaux irréductibles et G-équivariants sur les classes unipotentes de G.

Le second est une preuve d'une conjecture de Kawanaka sur les caractères de Gelfand-Graev généralisés de G : ils forment une base du $\mathbb{Z}$-module des caractères virtuels de G^F à support unipotent.

MOTS-CLÉS

Groupes réductifs, Groupes de Weyl, a-invariants, b-invariants, d-invariants, Correspondance de Springer, Faisceaux-caractères, Support unipotent, Caractères de Gelfand-Graev généralisés.

INTITULÉ ET ADRESSE DE L'UFR OU DU LABORATOIRE

Institut Girard Desargues
Université Claude Bernard Lyon 1
Bâtiment Braconnier (ex-101)
21 avenue Claude Bernard
69622 Villeurbanne cedex
France